Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1. (a) Für $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ definieren wir die Kurve $\gamma_\theta \colon \mathbb{R} \to S^2$ durch

$$\gamma_\theta(t) := \big(\cos(t)\cos(\theta), \sin(t)\cos(\theta), \sin(\theta)\big)^\top.$$

Für welche θ ist γ_θ eine Geodätische? Skizzieren Sie das Bild von γ_θ.

(b) Beweisen Sie, dass das Bild jeder Geodätischen in S^2 in einem Großkreis in S^2 liegt.

(c) Bestimmen Sie die Riemannsche Exponentialabbildung der Sphäre $S^2 \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie das Reskalierungslemma:

Es seien $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und γ_v die Geodätische mit $\gamma_v(0) = p \in S$ und $\gamma_v'(0) = v \in T_pS$. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Ist γ_v auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert, so ist die Geodätische $\gamma_{\lambda v}$ auf dem Intervall $(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$ definiert, und es gilt

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$$

für alle $t \in (-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$.

Aufgabe 3. Es sei $\varphi \colon S_1 \to S_2$ eine Isometrie zwischen den Flächen $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Ist $\gamma \colon I \to S_1$ eine Geodätische, so ist $\varphi \circ \gamma \colon I \to S_2$ ebenfalls eine. Geben Sie eine Geodätische auf der Zylinderfläche an, deren Spur in keiner affinen Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten ist.

Aufgabe 4. Es seien $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche und $\gamma \colon I \to S$ eine parametrisierte Kurve. Beweisen Sie: Ist γ gleichzeitig eine Krümmungslinie von S und Geodätische, so ist die Spur von γ in einer affinen Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten.

Hinweis: Die Spur von γ liegt in einer Ebene, wenn die Torsion von γ (aufgefasst als Raumkurve) Null ist, während die Krümmung von γ (aufgefasst als Raumkurve) nirgends verschwindet (warum?). Ist γ eine Geodätische, so stimmen die Normalenkrümmung $\kappa^\perp$ (siehe Aufgabe 4 von Blatt 8) und die Krümmung von γ aufgefasst als Raumkurve überein (warum?). Benutzen Sie Aufgabe 4 von Blatt 9 und die Frenet-Gleichungen.

Abgabe: bis Dienstag, den 25. Juli 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1