Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Elementare Differentialgeometrie
Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche. Ein Vektor $v \in T_pS$ heißt asymptotisch, wenn die Normalenkrümmung in Richtung von v Null ist. Eine Kurve γ in S heißt asymptotisch, wenn $\gamma'(t)$ für jedes t asymptotisch ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $p \in S$ hyperbolisch, so gibt es genau zwei asymptotische Vektoren in T_pS.

(b) Ist $p \in S$ elliptisch, so gibt es keinen asymptotischen Vektor in T_pS.

(c) Ist p parabolisch, so gibt es genau einen asymptotischen Vektor.

(d) Ist p flach, so sind alle Vektoren in T_pS asymptotisch.

(e) Finden Sie die asymptotischen Kurven in einer Zylinderfläche.

Aufgabe 2. Es seien S eine orientierte Fläche und $\gamma\colon I \to S$ eine nach BL parametrisierte Kurve in S. Wir definieren ein Vektorfeld $n\colon I \to \mathbb{R}^3$ längs γ durch die Forderung, dass $(\gamma'(t), n(t))$ für jedes $t \in I$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_{\gamma(t)}S$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)$ stets senkrecht auf $\gamma'(t)$ steht.

(b) Benutzen Sie (a), um die geodätische Krümmung κ_γ von γ in S zu definieren.

(c) Beweisen Sie: γ ist genau dann eine Geodätische, wenn κ_γ konstant Null ist.

Aufgabe 3. Beweisen Sie Cartans Formel: Für alle Vektorfelder X, Y auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und für jede 1-Form ω auf U gilt

$$d\omega(X,Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega[X,Y].$$

Zeigen Sie zunächst, dass die rechte Seite bilinear in X, Y über $\mathcal{C}^\infty(U)$ ist, und rechnen Sie die Identität dann für Basisvektorfelder nach.

Aufgabe 4. Wiederholen Sie folgende Aufgaben der bisherigen Blätter:
Blatt 1: Aufgabe 2; Blatt 2: Aufgabe 4; Blatt 3: Aufgaben 2 und 3; Blatt 4: Aufgabe 2; Blatt 6: Aufgabe 2; Blatt 7: Aufgabe 4; Blatt 8: Aufgaben 2, 3 und 4; Blatt 9: Aufgaben 1, 2 und 4; Blatt 11: Aufgaben 1,2 und 3; Blatt 12: Aufgaben 1,3 und 4.

Aufgabe 5. Wahr oder falsch?

(a) Ist S eine Rotationsfläche, so sind die Drehungen um die Rotationsachse von S Isometrien von S.

(b) Ist S eine kompakte orientierbare Fläche, so gilt $K(p) \geq 0$ für jeden Punkt $p \in S$.

Aufgabe 6. Es seien $v_0 \in \mathbb{R}^3$ und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Raumkurve. Gilt $\gamma'(t) \perp v_0$ für alle t und $\gamma(0) \perp v_0$, so gilt $\gamma(t) \perp v_0$ für alle t.

Aufgabe 7. Gibt es eine parametrisierte Kurve $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit endlicher Länge?

Aufgabe 8. Es sei γ eine reguläre ebene Kurve. Wenn alle Normalengeraden von γ durch einen gegebenen Punkt laufen, so liegt das Bild von γ in einer Kreislinie.

Aufgabe 9. Gibt es eine einfach geschlossene reguläre ebene Kurve mit Länge 10 cm, die eine Fläche mit Inhalt 20 cm^2 berandet?

Aufgabe 10. Die affinen Tangentialebenen der Fläche $\{z = xf(y/x);\ x \neq 0\}$ für eine beliebige glatte Funktion f gehen sämtlich durch 0.

Aufgabe 11. Schneiden eine Fläche S und eine affine Ebene E sich in genau einem Punkt p, so gilt $E = p + T_pS$.

Aufgabe 12. Es seien S_1 und S_2 zwei diffeomorphe Flächen. Zeigen Sie: S_1 ist orientierbar genau dann, wenn S_2 orientierbar ist.

Aufgabe 13. Es gelte $|\kappa_j| \leq 1$ für die beiden Hauptkrümmungen κ_j einer Fläche S. Gilt dann für die Krümmung κ einer beliebigen Kurve in S, dass $|\kappa| \leq 1$?

Aufgabe 14. Es seien $\gamma\colon (\pi/2,\pi) \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$\gamma(t) = \big(\sin(t), 0, \cos(t) + \ln(\tan(t/2))\big)^\top$$

gegebene Kurve und S_γ die durch γ definierte Rotationsfläche.

(a) Bestimmen Sie die Gaußkrümmung von S_γ. *Leiten Sie das Ergebnis nachvollziehbar her; setzen Sie nicht einfach in eine bekannte Formel ein.*

(b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien von S_γ.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von S_γ.

(d) Gibt es flächen- und winkeltreue Karten von S_γ?

Aufgabe 15. Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung $F(x) = \lambda x$ für ein $\lambda > 0$. Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, so ist $F(S)$ ebenfalls eine. Drücken Sie die Krümmungen von $F(S)$ durch die von S aus.

Aufgabe 16. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare kompakte Fläche, die nicht homöomorph zur Sphäre ist. Zeigen Sie, dass S sowohl elliptische als auch hyperbolische Punkte hat. Gibt es $p \in S$ mit $K(p) = 0$?

Aufgabe 17. Es sei S eine Rotationsfläche. Können die Durchschnitte $S \cap \{z = \text{const}\}$ durch Geodätische parametrisiert werden? Geben Sie ein Kriterium an, wann das der Fall ist.

Aufgabe 18. Für fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ betrachten wir die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x,y) = (x\sin(\alpha)\cos(y), x\sin(\alpha)\sin(y), x\cos(\alpha))^\top.$$

Zeigen Sie, dass F ein lokaler Diffeomorphismus auf sein Bild S ist. Ist F eine lokale Isometrie?

Aufgabe 19. Bestimmen Sie die Gaußkrümmung des Möbiusbandes.