Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Elementare Differentialgeometrie
Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1. Wir betrachten den oberen Zweig der Neil'schen Parabel $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)^\top$.

(a) Berechnen Sie die Länge von $\gamma|_{[0,T]}$.

(b) Berechnen Sie die Krümmung κ von γ und zeigen Sie, dass κ jeden Wert zwischen 0 und ∞ annimmt.

Aufgabe 2. Für $0 < a < b$ sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = \big(a\cos(t), b\sin(t)\big)^\top$.

(a) Skizzieren Sie die Spur von γ.

(b) Berechnen Sie die Krümmung κ von γ.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von κ.

(d) Geben Sie eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve an, deren Krümmung unendlich viele kritische Punkte hat.

Aufgabe 3. Für ein Intervall I sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre ebene Kurve mit Krümmung κ. Zeigen Sie:

(a) Die Krümmung ist invariant unter Umparametrisierung, d.h. für einen Diffeomorphismus $\varphi\colon I \to J$ gilt
$$\kappa_{\gamma\circ\varphi^{-1}} = \kappa \circ \varphi^{-1}.$$

(b) Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, so ist die Krümmung invariant unter orientierungserhaltender Isometrie, d.h. für $F \in I_+(\mathbb{R}^2, d)$ gilt
$$\kappa_{F\circ\gamma} = \kappa_\gamma.$$
Und wenn γ nicht nach Bogenlänge parametrisiert ist?

(c) Bestimmen Sie alle regulären ebenen Kurven mit konstanter Krümmung $\kappa \equiv 0$.

Aufgabe 4. Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, die in einer Kreisscheibe vom Radius R verläuft, also $||\gamma(t)|| \leq R$ für eine positive reelle Zahl R und alle $t \in I$. Für einen Punkt $t_0 \in I$ *im Inneren* des Intervalls I berühre die Kurve den Rand der Kreisscheibe: $||\gamma(t_0)|| = R$. Zeigen Sie folgende Abschätzung für die Krümmung der Kurve bei t_0:
$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}.$$
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}||\gamma(t)||^2$ und $\frac{d^2}{dt^2}|_{t=t_0}||\gamma(t)||^2$.

Abgabe: bis Dienstag, den 09. Mai 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1