Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. Für ein Intervall I sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve mit Krümmung κ und Windung τ. Zeigen Sie:

(a) Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert, so sind Krümmung und Windung invariant unter orientierungserhaltender Isometrie, d.h. für $F \in I_+(\mathbb{R}^3, d)$ gilt

$$\kappa_{F\circ\gamma} = \kappa_\gamma \quad \text{und} \quad \tau_{F\circ\gamma}(t) = \tau_\gamma(t) \text{ für alle } t \text{ mit } \kappa_\gamma(t) \neq 0.$$

(b) Gilt $\kappa(t) > 0$, so berechnet sich die Windung von γ durch

$$\tau(t) = \frac{\big\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'''(t) \big\rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde der Hauptsatz für Raumkurven bewiesen. Formulieren und beweisen Sie den Hauptsatz für *ebene* Kurven. Als Anwendung bestimmen Sie alle ebenen Kurven *konstanter* Krümmung.

Aufgabe 3. Für eine reelle Zahl $r > 0$ und ein Intervall I bezeichne rI das Intervall $\{rs \mid s \in I\}$. Es seien α und β nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Krümmung κ_α bzw. κ_β. Für alle $s \in I$ gelte

$$\kappa_\beta(rs) = \frac{1}{r}\kappa_\alpha(s).$$

Beweisen Sie, dass es eine Isometrie $f \in I(\mathbb{R}^2, d)$ gibt, so dass $r\alpha(s) = f(\beta(rs))$ für alle $s \in I$.

Aufgabe 4. Es sei $b\colon I = [t_0, t_1] \to S^2$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, wobei S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ bezeichne. Wir definieren die Raumkurve $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ durch

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \times b'(s) ds.$$

Zeigen Sie, dass die Windung von c konstant ist. Zeigen Sie ferner, dass jede nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit konstanter Windung auf diese Weise konstruiert werden kann.

Abgabe: bis Dienstag, den 16. Mai 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1