Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1. Wir betrachten die Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{ix}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Intervall $I = (a, b)$ mit $b - a < 2\pi$ gilt: $p|_I$ ist injektiv. Bestimmen Sie für ein solches Intervall I die Menge $p^{-1}\big(p(I)\big)$.

(b) Schreiben Sie die komplexe Abbildung $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{iz}$, die p offenbar fortsetzt, in reellen Koordinaten, d.h. als Abbildung $\widetilde{P}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und rechnen Sie nach, dass die Jakobi-Determinante von $\widetilde{P}$ in keinem Punkt verschwindet.

(c) Folgern Sie, dass P ein lokaler Diffeomorphismus und p ein lokaler Homöomorphismus sind.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, dass sich der Rotationsindex n_γ einer geschlossenen regulären ebenen Kurve $\gamma\colon [0, \omega] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$n_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^\omega \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt$$

berechnet.

(b) Wir betrachten die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)^\top$. Skizzieren Sie die Spur von γ und berechnen Sie n_γ.

Hinweis: Man kann das auftretende Integral bestimmen, indem man Periodizität und Symmetrie der zu integrierenden Funktion untersucht.

Aufgabe 3. Es sei K_1 der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 und K_2 der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius 2. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}^+$ und eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve γ mit $\gamma([0, 2\pi]) = K_1$, $\gamma([2\pi, a]) = K_2$ und $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \gamma(a) = (1, 0)$?

Aufgabe 4. Es seien γ und $\tilde{\gamma}$ zwei verschiedene, nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven $I \to \mathbb{R}^3$ mit nirgends verschwindenden Krümmungen und Torsionen. Außerdem gelte

$$\gamma(t) + \mathbb{R}N_\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) + \mathbb{R}N_{\tilde{\gamma}}(t)$$

für alle $t \in I$, wobei $N_\gamma(t)$ und $N_{\tilde{\gamma}}(t)$ die Normalenvektoren in t sind[1]. Beweisen Sie:

(a) $\tilde{\gamma} = \gamma + rN_\gamma$ mit konstantem r.

(b) Der Winkel, der von $\frac{d}{dt}\gamma$ und $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}$ eingeschlossen wird, ist konstant.

(c) Sowohl γ als auch $\tilde{\gamma}$ haben eine konstante Krümmung und eine konstante Torsion.

Abgabe: bis Dienstag, den 23. Mai 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

[1] In diesem Fall sagt man, dass γ und $\tilde{\gamma}$ ein Bertrandsches Kurvenpaar bilden.