Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgenden Teil des Satzes zur Charakterisierung konvexer Kurven: Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine konvexe reguläre ebene Kurve. Dann gilt für die Krümmung κ von γ entweder $\kappa(t) \geq 0$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 2. Es sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, konvexe ebene Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Diese Kurve schneide eine Gerade g in mehr als zwei Punkten. Wir wollen zeigen, dass γ ein Segment dieser Geraden enthält:

(a) Zeigen Sie, dass g die gemeinsame Tangente von γ in allen Schnittpunkten von γ und g ist.

(b) Es sei $\Theta\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $\gamma'(t) = e^{i\Theta(t)}$ für alle $t \in [a, b]$ (Liftungslemma). Warum ist Θ monoton? Folgern Sie, dass die Krümmung κ auf einem ganzen Intervall konstant den Wert 0 annimmt, d.h. γ enthält ein Segment von g.

Aufgabe 3. Wir betrachten die 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie eine offene Teilmenge von S^2 an, die sich als Graph einer glatten Funktion $\mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ schreiben lässt. Wie viele dieser Graphen benötigt man mindestens als lokale Parametrisierungen, um S^2 vollständig zu überdecken?

(b) Beweisen Sie, dass es keine lokale Parametrisierung gibt, deren Bild ganz S^2 ist.

Aufgabe 4.

(a) Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $U \subseteq S$ gibt, so dass $U \backslash \{p\}$ zusammenhängend ist.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(c)$ für alle $c \neq 0$ eine Fläche ist und finden Sie ein $p \in f^{-1}(0)$, so dass die offene Teilmenge $f^{-1}(0) \backslash \{p\}$ eine Fläche ist. Warum ist $f^{-1}(0)$ keine Fläche?

Abgabe: bis Dienstag, den 30. Mai 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1