Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Elementare Differentialgeometrie
Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1. Es seien S_1 und S_2 zwei Flächen im $\mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung mit $f(S_1) \subset S_2$. Beweisen Sie, dass die induzierte Abbildung $f|_{S_1}\colon S_1 \to S_2$ wiederum glatt ist.

Aufgabe 2. Ist $f\colon S_1 \to S_2$ nun eine glatte Abbildung von Flächen, so ist das Differential

$$df(p)\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$$

in einem Punkt $p \in S_1$ gegeben durch $df(p)\gamma'(0) := (f \circ \gamma)'(0)$, wobei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ eine parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = p$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $df(p)$ wohldefiniert ist, also nur von $\gamma'(0)$ und nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt.

(b) Beweisen Sie, dass $df(p)$ für alle $p \in S_1$ eine lineare Abbildung, d.h. ein Homomorphismus von Vektorräumen, ist.

(c) Beweisen Sie: Ist p ein Punkt von S_1, für den $df(p)$ ein Isomorphismus ist, so gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset S_1$ von p und $V_2 \subset S_2$ von $f(p)$ mit $f(V_1) \subset V_2$, so dass $f|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ ein Diffeomorphismus ist.

(d) Berechnen Sie das Differential für die Abbildung $f\colon S^2 \to S^2$ mit $f(p) = -p$ für alle $p \in S^2$.

Aufgabe 3. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_2(t))^T$ eine injektive, reguläre Kurve mit $\gamma_1(t) > 0$ für alle $t \in I$. Beweisen Sie, dass die von γ erzeugte sogenannte *Rotationsfläche*, d.h. die Menge

$$S := \left\{ F(t,s) := \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ 0 \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix};\ (t,s) \in \mathbb{R} \times I \right\}$$

eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $F|_{(0,2\pi)\times I}$ und $F|_{(-\pi,\pi)\times I}$ lokale Parametrisierungen von S sind, die S überdecken.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass folgende Flächen durch Geraden überdeckt sind:

(a) $S = \{z - xy = 0\}$. *Hinweis:* Wählen Sie als Fußpunkte der Geraden Punkte der Form $(x, 0, 0) \in S$.

(b) $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. *Hinweis:* Wählen Sie als Fußpunkte der Geraden Punkte der Form $(x, y, 0) \in S$.

Auf Etage 3 des Institutsgebäudes in der Eckerstraße kann man Modelle dieser Flächen mit den Geradenscharen betrachten.

Abgabe: bis Dienstag, den 13. Juni 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1