Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass das Paraboloid $\{z = x^2 + y^2\}$ diffeomorph zur Ebene ist.

(b) Konstruieren Sie einen Diffeomorphismus zwischen dem Ellipsoid $\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ für $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und der Sphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die Tangentialflächen von $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ in den Punkten $(x, y, 0) \in S$ und zeigen Sie, dass diese parallel zur z-Achse sind.

(b) Es sei S eine Fläche. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon S \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \|p - p_0\|^2$ für $p \in S$ und einen festen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$ differenzierbar ist und berechnen Sie das Differential $df(p)\colon T_pS \to \mathbb{R}$ für alle $p \in S$.

Für welche p_0 ist auch die Abbildung $f\colon S \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \|p - p_0\|$ differenzierbar?

Aufgabe 3. (a) Es sei S der Graph der Funktion $f \in C^\infty(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende offene Teilmenge ist. Zeigen Sie, dass $F\colon U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$, eine Parametrisierung von S definiert und berechnen Sie die zurückgezogene erste Fundamentalform von S in dieser Parametrisierung.

(b) Es sei S die Rotationsfläche mit erzeugender Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, \gamma_2(t))^\top$. Berechnen Sie die zurückgezogene erste Fundamentalform von S bezüglich der Parametrisierung als Rotationsfläche.

(c) Zeigen Sie, dass das Hyperboloid $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ eine Rotationsfläche ist und wenden Sie die allgemeine Formel aus (b) zur Berechnung der ersten Fundamentalform von S an.

Aufgabe 4. Das Möbius-Band M entsteht durch Verkleben der Seiten AD und BC eines Rechtecks $ABCD$, wobei im Gegensatz zum Torus eine Drehung der Seite BC um 180° stattfindet, so dass A mit C und B mit D identifiziert wird.

(a) Erklären Sie, warum M homöomorph zum Bild der Abbildung $F\colon \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$,

$$F(t, s) = \big(\cos(t)(1 + s\cos(t/2)), \sin(t)(1 + s\cos(t/2)), s\sin(t/2)\big)^\top,$$

ist, und wie man aus F lokale Parametrisierungen von M erhält.

(b) Beweisen Sie, dass M nicht orientierbar ist. *Hinweis:* Es gibt nur zwei Möglichkeiten, wie ein glattes Einheitsnormalenfeld von M in einer lokalen Parametrisierung aussehen kann. Zeigen Sie, dass diese lokalen Darstellungen nicht zu einem glatten Einheitsnormalenfeld auf ganz M verkleben können.

Abgabe: bis Dienstag, den 20. Juni 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1