Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Elementare Differentialgeometrie
Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1. Es seien $f\colon S_1 \to S_2$ und $g\colon S_2 \to S_3$ glatte Abbildungen von Flächen. Beweisen Sie, dass die Verknüpfung $g \circ f$ ebenfalls glatt ist und dass für die Differentiale in einem beliebigen Punkt $p \in S_1$ gilt:

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)\colon T_pS_1 \to T_{g(f(p))}S_3.$$

Aufgabe 2. Wir betrachten die Fläche $S = \{z = xy\}$.

(a) Geben Sie ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S an. *Hinweis:* Schreiben Sie S als Faser einer glatten Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Ein Einheitsnormalenfeld erhält man dann durch den Gradienten von f nach Normierung.

(b) Bestimmen Sie die Weingartenabbildung in einem beliebigen Punkt $p \in S$.

(c) Die *Hauptkrümmungen* κ_1 und κ_2 in einem Punkt p sind die Eigenwerte der Weingartenabbildung W_p. Die von den zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2 aufgespannten Geraden heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*. Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen von S.

Aufgabe 3. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon I \to S$ für ein Intervall I und eine Fläche S nennt man *Krümmungslinie*, falls $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ eine Hauptkrümmungsrichtung (siehe Aufgabe 2 (c)) für alle $t \in I$ ist.

(a) Was sind die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen der Zylinderfläche $S = S^1 \times \mathbb{R}$ in $p \in S$?

(b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien von S.

Aufgabe 4. Es sei S eine orientierbare Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und $p \in S$. Weiter sei $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = p$. Wir definieren die *Normalenkrümmung* $\kappa^\perp$ von S im Punkt p in Richtung $\gamma'(0)$ durch

$$\kappa^\perp = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\kappa^\perp = h(\gamma'(0), \gamma'(0))$, wobei h die zweite Fundamentalform von S ist. *Hinweis*: Für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt $\big\langle \gamma'(t), N(\gamma(t)) \big\rangle = 0$ (warum?).

(b) Es seien $\kappa_1 < \kappa_2$ die Hauptkrümmungen von S in p. Zeigen Sie, dass κ_1 bzw. κ_2 Minimum bzw. Maximum der Menge

$$\{\kappa^\perp \mid \kappa^\perp \text{ Normalenkrümmung in } p \text{ in Richtung } \gamma'(0) \in T_pS\}$$

ist. *Hinweis*: Es seien $v_1, v_2 \in T_pS$ normierte Eigenvektoren von W_p zu den Eigenwerten κ_1, κ_2. Jeder weitere Einheitsvektor $v \in T_pS$ schreibt sich als $v = \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2$ für ein gewisses $\theta \in [0, 2\pi]$ (warum?). Wenden Sie Aufgabenteil (a) an.

Abgabe: bis Dienstag, den 27. Juni 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1