Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Elementare Differentialgeometrie
Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1. Es sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Kurve mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0, t)^\top$, wobei $\gamma_1(t) > 0$ für alle $t \in I$. Wir betrachten die von γ erzeugte Rotationsfläche S (siehe Aufgabe 3 von Aufgabenblatt 6).

(a) Bestimmen Sie die Weingarten-Abbildung in allen Punkten $p \in S$.

(b) Leiten Sie Formeln für die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung in allen Punkten $p \in S$ her.

(c) Finden Sie eine allgemeine Formel für das Flächenelement von S und berechnen Sie die Oberfläche von $\{x \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1, -1 < x_3 < 1\}$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die durch die Parametrisierung $F\colon I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$,

$$F(t,s) = \gamma(t) + s \cdot v(t),$$

gegebene Regelfläche S, wobei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, parametrisierte Kurve und v ein parametrisierter Vektor ist, so dass $v(t)$ und $\gamma'(t)$ für alle t linear unabhängig sind. (Insbesondere ist also $v(t) \neq 0$ für alle t.)

(a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung in einem beliebigen Punkt $F(t,s)$ gegeben ist durch

$$\frac{-\det\big(\gamma'(t), v(t), v'(t)\big)^2}{\det\big(g(t,s)\big)^2},$$

wobei g die unter F zurückgezogene erste Fundamentalform von S ist.

(b) Gibt es kompakte Regelflächen?

Aufgabe 3. Es sei S eine Fläche, die global als Graph gegeben ist. Leiten Sie Formeln für die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung in allen Punkten $p \in S$ her.

Aufgabe 4. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N. Zeigen Sie: Genau dann ist eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma\colon I \to S$ eine Krümmungslinie von S, wenn es eine Funktion $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\frac{d}{dt}N\big(\gamma(t)\big) = \lambda(t)\gamma'(t)$ gibt. In diesem Fall ist $-\lambda(t)$ die entsprechende Hauptkrümmung.

Abgabe: bis Dienstag, den 4. Juli 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1