

① a) falsch, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t, 0)$,
 parametrisiert das Geradenseg. $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$,
 aber $\gamma'(t) = \gamma(t) \neq 0$.

b) falsch: $S = \{(x, y, x^4 + y^4) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
 $p = 0$: $T_p S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{z = 0\}$
 $S \subseteq \{z \geq 0\}$,
 aber $k(0) = 0$.

② γ regulär $\Rightarrow$ man kann auch, dass γ
 nach BL param.

Annahme: γ param. keine Geradenseg. $\Rightarrow \gamma''(t_0) \neq 0$
 für ein $t_0 \in I$
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

Voraussetzung $\Rightarrow \exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$: $p = \gamma(t) + \varphi(t)\gamma'(t)$
 $\forall t \in I$

Bem.: γ, γ' glatt $\Rightarrow \varphi$ diff'bar

Ableiten $\Rightarrow 0 = (1 + \varphi'(t))\gamma'(t) + \varphi(t)\gamma''(t)$
 $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

γ nach BL param.: $\gamma'(t) \perp \gamma''(t) \quad \forall t \in I$
 $\Rightarrow \gamma'(t), \gamma''(t)$ lin. unabh. $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

$$\Rightarrow \varphi(t) = 0 \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow |y(t)| = p \quad \text{---} \quad \text{; nicht möglich, da } y \text{ regulär.}$$

$$\Rightarrow y''(t) = 0 \quad \forall t \in I, \text{ d.h. } y \text{ param. Geradensegment.}$$

$$\textcircled{3} \quad y \text{ regulär} \Rightarrow y \text{ ist nach BL param.} = y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Umlaufsatz von Hopf} \Rightarrow \kappa_y = \pm 1$$

$$\text{Nach eventuellem Orientierungswechsel} = \kappa_y = 1.$$

$$\Rightarrow 1 = \kappa_y = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b c dt = \frac{c(b-a)}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} L(y)$$

$$\Rightarrow L(y) \geq \frac{2\pi}{c}.$$

$$\textcircled{4} \text{ (a) Drehungen um die } z\text{-Achse sind Isometrien von } S_y, \text{ und Isometrien bilden Geod. auf } S_y. \text{ ab} \Rightarrow \text{es reicht, } S_y \cap \{y=0\} \text{ zu betrachten.}$$

$$S_y \cap \{y=0\} \text{ wird durch } \gamma_{\pm}: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \text{ parametrisiert. Nach Vor. ist } \gamma \text{ nach BL param.}$$

$$\text{Zeige: } \gamma = \gamma_{\pm}: I \rightarrow S_y \text{ ist Geod.}$$

$$\text{ZZ: } \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)} S_y \quad \forall t \in I.$$

Parametrisierung von S_γ :

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) \gamma_1(s) \\ \sin(t) \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$$

1 Basis von $T_{F(t, s)} S_\gamma$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \gamma_1(s) \\ \cos(t) \gamma_1(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) \gamma_1'(s) \\ \sin(t) \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Basis von } T_{\gamma(s)} S_\gamma: v_1(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1'(s) \\ 0 \end{pmatrix}, v_2(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1''(s) \\ \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix} = \gamma'(s)$$

$$\gamma''(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1''(s) \\ 0 \\ \gamma_2''(s) \end{pmatrix} = \gamma''(s) \perp v_1(s) \quad \forall s \text{ und}$$

$$\gamma''(s) \perp \gamma'(s) \quad (\text{da } \gamma \text{ nach BL param.})$$

$$\Rightarrow \gamma''(s) \perp T_{\gamma(s)} S_\gamma \quad \forall s, \text{ d.h. } \gamma \text{ ist geod.}$$

(b) Erste FF bzgl. obiger Param. F :

$$g(t, s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma_1'(s)^2 + \gamma_2'(s)^2 = 1 \quad \forall s)$$

$$\Rightarrow dA = \gamma_1(s) dt \wedge ds \quad \text{und} \quad \rho(s) = |\gamma_1(s)| = \gamma_1(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(\{ \dots \}) &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} \rho(s) dt \right) ds \\ &= 2\pi \int_a^b \rho(s) ds. \quad - \end{aligned}$$

c) $\sin$ ist zwar nicht monoton auf $[0, 2\pi]$,
 wir können aber das Integral auf zwei Intervalle
 aufteilen, auf denen $\sin$ monoton ist, und
 dann (b) anwenden:

$$\begin{aligned} A(S_g) &= 2\pi \int_0^{\pi} (2 + \cos(t)) dt + 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} (2 + \cos(t)) dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \cos(t)) dt = 2\pi [2t + \sin(t)]_0^{2\pi} \\ &= \underline{8\pi^2}. \end{aligned}$$

Es handelt sich bei S_g um einen Torus.

d) Berechne ein glattes Normalenfeld:

$$\tilde{N}(t, s) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, s) \times \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) g_1(s) g_2'(s) \\ \sin(t) g_1(s) g_2'(s) \\ -g_1(s) g_1'(s) \end{pmatrix}$$

Normierung: $N(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) g_2'(s) \\ \sin(t) g_2'(s) \\ -g_1'(s) \end{pmatrix}$

Berechne die zweite FF bzgl F :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, s) = \begin{pmatrix} -\cos(t) g_1(s) \\ -\sin(t) g_1(s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s}(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) g_1'(s) \\ \cos(t) g_1'(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) g_1''(s) \\ \sin(t) g_1''(s) \\ g_2''(s) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h(t,s) = \begin{pmatrix} g_1'(s)g_2'(s) & 0 \\ 0 & g_1''(s)g_2'(s) - g_1'(s)g_2''(s) \end{pmatrix}$$

Im konkreten Beispiel :

$$g(t,s) = \begin{pmatrix} (2+\cos(s))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h(t,s) = \begin{pmatrix} (2+\cos(s))\cos(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k(t,s) = \frac{\det h(t,s)}{\det g(t,s)} = \frac{\cos(s)}{2+\cos(s)}$$

- ⑤ Die Weingarten abb $W_p = -dN(p) \in \text{End}(T_p S)$ ist selbstadjungiert bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle_p \Rightarrow \exists$ ON-Basis (v_1, v_2) von $T_p S$ mit $W_p v_j = k_j v_j : j=1,2$.

Also: $k(p) = \det(W_p) = k_1 k_2$ und

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr}(W_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

S Minimalfläche $\Rightarrow H(p) = 0 \quad \forall p \in S$

$$\Rightarrow k_1 = -k_2 \text{ in allen } p \in S.$$

Also: $k(p) = -k_1^2 = -k_2^2$.

Es folgt für alle $1 \leq i, j \leq 2$:

$$\begin{aligned} \langle dN(p|v_i, dN(p|v_j) &= \langle W_p v_i, W_p v_j \rangle \\ &= \langle k_i v_i, k_j v_j \rangle \end{aligned}$$

$$= k_i k_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= k_i k_j \delta_{ij} = \begin{cases} k_1^2 & : i=j=1 \\ 0 & : i \neq j \\ k_2^2 & : i=j=2 \end{cases}$$

$$= -k(p) \langle v_i, v_j \rangle.$$

Da beide Seiten bilinear sind, folgt diese Identität für alle $v, w \in T_p S$.

⑥ Nach Vor. gibt es eine reg. Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(I) = S \cap E$ (S die orientierbare Fläche und E die affine Ebene) und

$$T_{\gamma(t)} S = E \quad \forall t \in I.$$

Es sei N ein glob. ENF auf S .

$N(\gamma(t)) \perp E \quad \forall t \in I \Rightarrow N$ ist konstant längs γ

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) = dN(\gamma(t)) \gamma'(t) \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ liegt in Kern von $W_{\gamma(t)}$

$\Rightarrow K(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in I$, d.h. alle $\gamma(t)$ sind flach oder parabol.