Ist die Mathematik widerspruchsfrei?

Heike Mildenberger

Universität Freiburg, Mathematisches Institut, Abteilung für Logik
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mildenberger/talks

Kolloquium zur Didaktik der Mathematik
Universität Freiburg 31.5.2011

Übersicht

Klärung der Begriffe in der Titelfrage

Übersicht

Klärung der Begriffe in der Titelfrage

Ein historisches Beispiel

Übersicht

Klärung der Begriffe in der Titelfrage

Ein historisches Beispiel

Hilbert

Übersicht

Klärung der Begriffe in der Titelfrage

Ein historisches Beispiel

Hilbert

Zermelo, Fraenkel und das Auswahlaxiom

Übersicht

Klärung der Begriffe in der Titelfrage

Ein historisches Beispiel

Hilbert

Zermelo, Fraenkel und das Auswahlaxiom

Gödel

Übersicht

Klärung der Begriffe in der Titelfrage

Ein historisches Beispiel

Hilbert

Zermelo, Fraenkel und das Auswahlaxiom

Gödel

Kleinere Axiomensysteme

Übersicht

Übersicht

Mathematik

Die Mathematik (griechisch: Kunst des Lernens) besteht aus Schlussketten, die den Beweisregeln folgend, bei den Axiomen anfangen und mit mathematischen Sätzen enden.

Mathematik

Die Mathematik (griechisch: Kunst des Lernens) besteht aus Schlussketten, die den Beweisregeln folgend, bei den Axiomen anfangen und mit mathematischen Sätzen enden.

Meistens nimmt man die sogenannten klassischen Beweisregeln. Beispiele: Tertium non datur, ex contradictione omnis, modus ponens, die Syllogismen des Aristoteles (die fast vollständig sind), der Hilbert-Kalkül

Wir schreiben $T \vdash \varphi$, wenn es einen Beweis von φ aus den Voraussetzungen T gibt.

Beachten Sie

$$\neg(T \vdash \varphi)$$

ist i.A. viel schwächer als

$$T \vdash \neg\varphi$$

Kurt Gödel (1906–1978)

Der Gödel'sche Vollständigkeitssatz, 1930

Seien T eine Menge von Formeln und φ eine Formel der Sprache der ersten Stufe zur Symbolmenge τ. Äquivalent sind:

1. $T \vdash \varphi$.
2. *Für alle τ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt: Wenn $\mathcal{A}$ alle Formeln in T erfüllt, dann erfüllt $\mathcal{A}$ auch φ.*

Duden: Axiom

Duden: Axiom: als absolut richtig anerkannter Grundsatz, gültige Wahrheit, die keines Beweises bedarf.

Widerspruch, Widerspruchsfreiheit

Ein Widerspruch besteht aus einer Aussage φ und ihrem Negat $\neg\varphi$.

Beispiele:
1. 5 is prim, und 5 ist nicht prim.
2. $0 \neq 0$

Je zwei Widersprüche sind äquivalent. Man kann also irgendeinen als Repräsentanten nehmen.

Widerspruch, Widerspruchsfreiheit

Ein Widerspruch besteht aus einer Aussage φ und ihrem Negat $\neg\varphi$.

Beispiele:
1. 5 is prim, und 5 ist nicht prim.
2. $0 \neq 0$

Je zwei Widersprüche sind äquivalent. Man kann also irgendeinen als Repräsentanten nehmen.

Definition

Ein Axiomensystem (Satzmenge, Theorie) ist widerspruchsfrei, wenn sich aus ihm kein Widerspruch herleiten lässt.

Folgerung

Also lautet unsere Titelfrage etwas genauer:

Kann man aus den Axiomen der Mathematik einen Widerspruch herleiten?

Welches sind eigentlich die (meistens stillschweigend angenommenen) Axiome der Mathematik?

Das Frege'sche Axiomensystem 1879

Zur Formulierung der Axiome brauchen wir die Sprache der ersten Stufe mit einem zweistelligen Symbol $\in$, das für die „ist ein Element von"-Relation steht und die Mengenklammern

Das Frege'sche Axiomensystem 1879

Zur Formulierung der Axiome brauchen wir die Sprache der ersten Stufe mit einem zweistelligen Symbol $\in$, das für die „ist ein Element von"-Relation steht und die Mengenklammern

(Gottlob Frege 1848–1925)

Frege'sches Axiomenschema

Für jede erststufig definierbare Eigenschaft $\varphi(x)$ ist

$$\{x \mid x \text{ ist eine Menge und } \varphi(x)\}$$

eine Menge.

Was heißt erststufig definierbar (oder in der Sprache der ersten Stufe formulierbar oder in der Prädikatenlogik definierbar)?

überspringe Syntax und Semantik der ersten Stufe

Präzisierung: Die Sprache der ersten Stufe [der Mengenlehre]

Die Symbole von $\mathscr{L}(\in)$ sind:
Konjunktoren: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$
Quantoren: $\exists$, $\forall$
Klammern: (,)
speziell für die Mengenlehre: das einzige sogenannte nicht logische Symbol: $\in$
das Gleichheitszeichen: $=$
Variablen: v_i, $i \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung: Die Sprache der ersten Stufe

Atomare Formeln sind: $v_i = v_j$, $v_i \in v_j$ für $i, j \in \mathbb{N}$.
Die Menge der Formeln ist die kleinste Menge, für die folgende Abschlusseigenschaften zutreffen: Atomare Formeln sind Formeln. Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\neg\varphi$, $\exists v_i \varphi$, $\forall v_i \varphi$ Formeln.
Die Syntax ist hiermit exakt definiert.

Fortsetzung: Die Sprache der ersten Stufe

Atomare Formeln sind: $v_i = v_j$, $v_i \in v_j$ für $i, j \in \mathbb{N}$.
Die Menge der Formeln ist die kleinste Menge, für die folgende Abschlusseigenschaften zutreffen: Atomare Formeln sind Formeln. Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind auch $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\neg\varphi$, $\exists v_i \varphi$, $\forall v_i \varphi$ Formeln.
Die Syntax ist hiermit exakt definiert.
Skizze der Definition der Semantik. Wir haben Strukturen der Art $\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \dots)$ mit Trägermengen A und Interpretationen der nicht logischen Symbole. Der Begriff „$\mathcal{A}$ efüllt φ" (oder „φ gilt in $\mathcal{A}$") wird wieder rekursiv über den Formelaufbau von φ definiert.
Variablen rangieren über Elemente der Strukturträger, nicht über Teilmengen oder noch höhere Objekte. In der Mengenlehre rangieren alle Variablen über Mengen.

Die Russell'sche Antinomie

Bertrand Russell 1872–1970

Theorem, Russell 1903

Das Frege'sche Axiomensystem ist widersprüchlich.

Die Russell'sche Antinomie

Bertrand Russell 1872–1970

Theorem, Russell 1903

Das Frege'sche Axiomensystem ist widersprüchlich.

Beweis: Wir betrachten

$$y = \{x \mid x \notin x\}$$

Nach Frege ist dies eine Menge. Es gilt: $y \in y$ gdw $y \notin y$.

Nach Frege und Russell: Hilbert, Zermelo, Fraenkel

Erfahrung: Nach Übergang zu genügend großen Trägermengen genügt die Sprache der ersten Stufe, um jeden mathematischen Sachverhalt auszudrücken.

Aufgabe

Gesucht ist ein widerspruchsfreies (entscheidbares) Axiomensystem, das für die Mathematik ausreicht.

Nach Frege und Russell: Hilbert, Zermelo, Fraenkel

Erfahrung: Nach Übergang zu genügend großen Trägermengen genügt die Sprache der ersten Stufe, um jeden mathematischen Sachverhalt auszudrücken.

Aufgabe

Gesucht ist ein widerspruchsfreies (entscheidbares) Axiomensystem, das für die Mathematik ausreicht.

Was reicht für Ihre Modellierungen und Ihre Mathematik aus?

Wünsche

Modellierung:

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, . . .

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, . . .

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, ...

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Analysis, reelle Zahlen, Cauchy-Folgen, Limites

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, ...

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Analysis, reelle Zahlen, Cauchy-Folgen, Limites

Graphen, Bäume, Halbordnungen, Strukturen aus der Kombinatorik

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, ...

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Analysis, reelle Zahlen, Cauchy-Folgen, Limites

Graphen, Bäume, Halbordnungen, Strukturen aus der Kombinatorik

größere Räume, maximale Ideale, Ultrafilter

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, ...

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Analysis, reelle Zahlen, Cauchy-Folgen, Limites

Graphen, Bäume, Halbordnungen, Strukturen aus der Kombinatorik

größere Räume, maximale Ideale, Ultrafilter

Wohlordnungen, Auswahlfunktionen, Basen

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, ...

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Analysis, reelle Zahlen, Cauchy-Folgen, Limites

Graphen, Bäume, Halbordnungen, Strukturen aus der Kombinatorik

größere Räume, maximale Ideale, Ultrafilter

Wohlordnungen, Auswahlfunktionen, Basen

sollen aufgrund der Axiome existieren.

Wünsche

Modellierung:

ganze Zahlen, Bruchzahlen, Bankkonto, Wirtschaft, Steuern, Zinsen, ...

Algebra, natürliche Zahlen, die Menge der natürlichen Zahlen

Analysis, reelle Zahlen, Cauchy-Folgen, Limites

Graphen, Bäume, Halbordnungen, Strukturen aus der Kombinatorik

größere Räume, maximale Ideale, Ultrafilter

Wohlordnungen, Auswahlfunktionen, Basen

sollen aufgrund der Axiome existieren.

Hilbert'scher Wunsch (David Hilbert 1862–1943)

Das Axiomensystem soll widerspruchsfrei sein. Man soll dieses auf der Basis des Axiomensystems oder mit noch weniger beweisen können.

Zermelo (1871–1953), Fraenkel (1891–1965) und Auswahlaxiom, etwa 1904 – 1930

Das Axiomensystem ZFC hat acht Axiome und zwei Schemata von zwei mal abzählbar unendlich vielen Axiomen. Diese Axiome sind Aussagen über das Universum $\mathbf{V}$ aller Mengen und die Relation $x \in y$.

Zermelo (1871–1953), Fraenkel (1891–1965) und Auswahlaxiom, etwa 1904 – 1930

Das Axiomensystem ZFC hat acht Axiome und zwei Schemata von zwei mal abzählbar unendlich vielen Axiomen. Diese Axiome sind Aussagen über das Universum $\mathbf{V}$ aller Mengen und die Relation $x \in y$.

Die acht Axiome fordern, dass das Mengenuniversum fundiert (jede nicht leere Menge hat ein $\in$-minimales Element) und extensional (Mengen mit den gleichen Elementen sind gleich) ist. Zudem fordern sie die Existenz einer unendlichen Menge, von Potenzmengen, von Zweiermengen, von Vereinigungen, von Auswahlfunktionen. Die beiden Schemata fordern, dass alle erststufig definierbaren Teilmengen existieren und dass erststufig definierbare Operationen Bildmengen haben.

überspringe ZFC-Liste

Liste ZFC I

Beachten Sie:
1. { und } sind nur sprachliche Abkürzung zum Sparen einer weiteren Variablen, auch $\subseteq$
2. Die Axiome sind in der Sprache der ersten Stufe formulierbar

Axiom 0: Existenz. Es gibt eine Menge. Formal:

$$\exists x(x = x).$$

Axiom 1: Extensionalität. Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind gleich. Formal:

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow y = x).$$

Axiom 2: Fundierung. Die $\in$-Relation ist fundiert, d.h., jede nicht leere Menge hat ein $\in$-minimales Element. Formal:

$$\forall x(\exists y \in x \to \exists y \in x(\neg\exists z(z \in y \wedge z \in x)))$$

Axiom 3: Aussonderungsschema. Definierbare Teile von *Mengen* sind Mengen. Formal: Für jedes $\varphi \in \mathscr{L}(\in)$ mit den freien Variablen $x, z, w_1, w_2, \ldots, w_n$ gilt folgendes

$$\forall z \forall w_1 \ldots \forall w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi).$$

Liste ZFC III

Axiom 4: Paarmengenaxiom. Zu je zwei Mengen x, y gibt es eine Obermenge von $\{x, y\}$. Formal:

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

(Erst ab jetzt darf man Mengenklammern schreiben!)

Axiom 5: Vereinigungsmengenaxiom. Zu jeder Menge F gibt es eine Obermenge von $\bigcup F = \{x \mid \exists y \in F x \in y\}$. Formal:

$$\forall F \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A).$$

Axiom 6: Ersetzungsschema. Definierbare Operationen eingeschränkt auf eine Definitionsmenge haben eine Bildmenge. Formal:
Für jedes $\varphi \in \mathscr{L}(\in)$ mit den freien Variablen $x, y, A, w_1, w_2, \ldots, w_n$ gilt folgendes:

$$\forall A \forall w_1 \ldots \forall w_n (\forall x \in A \exists^{=1} y \varphi \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi).$$

Liste ZFC IV

Axiom 7: Unendlichkeitsaxiom. Es gibt eine unendliche Menge. Formal:

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x)).$$

Axiom 8: Potenzmengenaxiom. Zu jeder Menge gibt es die Potenzmenge. Formal:

$$\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

Wir schreiben $Pot(x)$ für $\{y \mid y \subseteq x\}$.

Axiom 9: Auswahlaxiom. Jede Menge nicht leerer Mengen hat eine Auswahlfunktion. Formal:

$$\forall A\big(\forall x \in A \exists y y \in x \rightarrow \exists f \colon A \rightarrow \bigcup A \forall x \in A f(x) \in x\big).$$

Kultur und Mainstream

Auf ZFC baut heute alle Mathematik auf, wenn nichts anderes genannt ist. Etwa 95% der Mathematikerinnen und Mathematiker arbeiten mit ZFC und den klassischen Beweisregeln (die ebenfalls die ungenannten sind).

Andere Richtungen: Intuitionismus, Konstruktivismus

ZF + AD
determinacy (eine starke Negation des Auswahlaxioms)

Erfahrung seit 1930

ZFC genügt für fast alle heute gewünschte Mathematik.

Erfahrung seit 1930

ZFC genügt für fast alle heute gewünschte Mathematik.

ZFC genügt insbesondere fast immer für die Schulmathematik.
Warum?

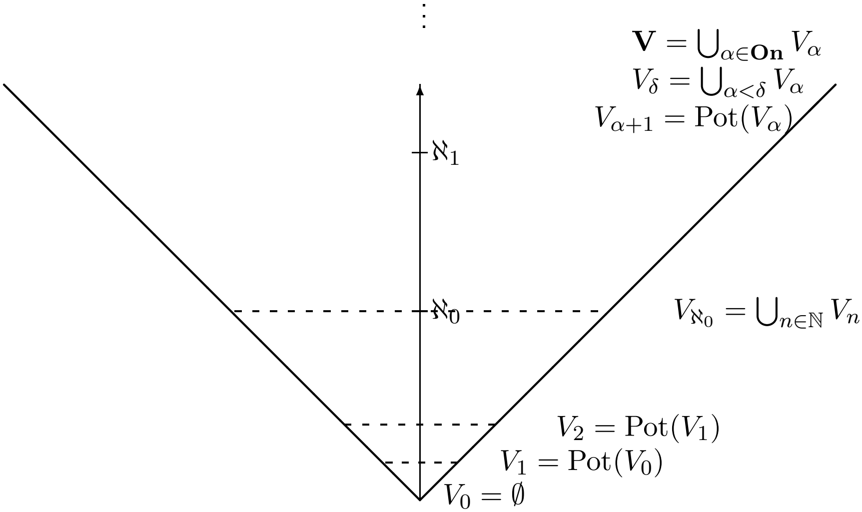
Erfahrung seit 1930

ZFC genügt für fast alle heute gewünschte Mathematik.

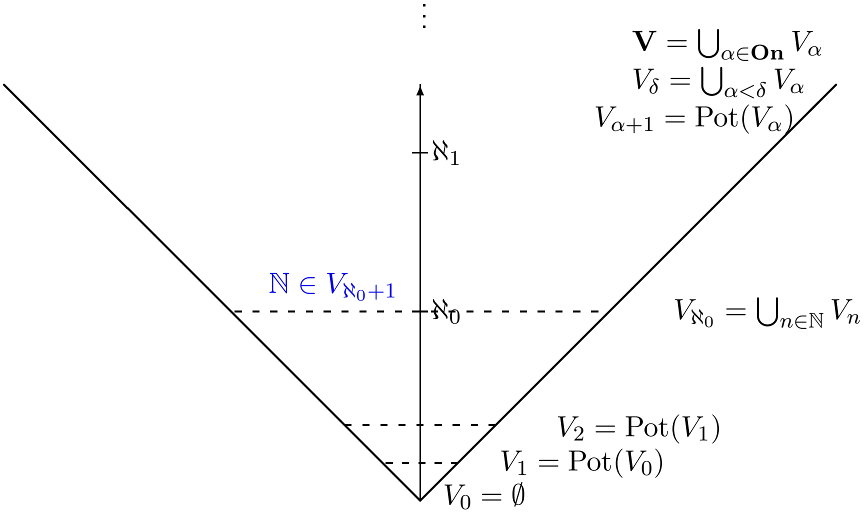
ZFC genügt insbesondere fast immer für die Schulmathematik. Warum?

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$, Vektorräume, Geometrie, Algebra, Analysis, Stochastik

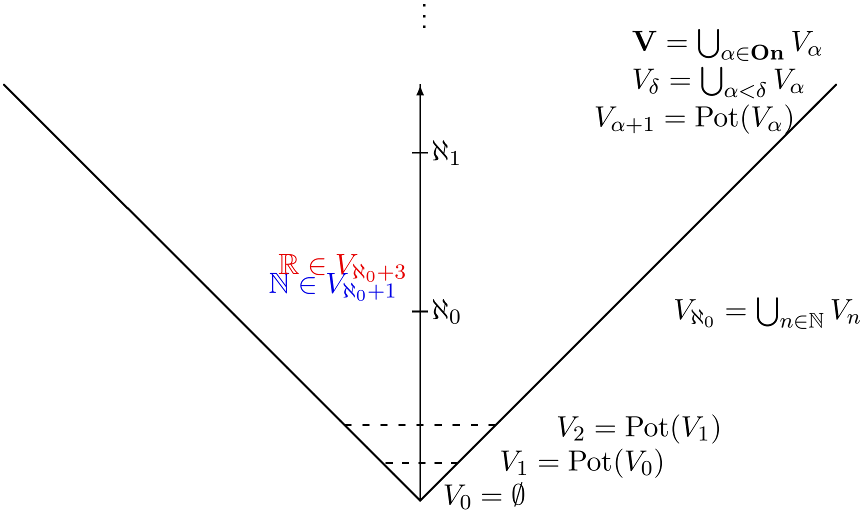
Eine Skizze eines Modells $(\mathbf{V}, \in)$ von ZFC und der Lage von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



Eine Skizze eines Modells $(\mathbf{V}, \in)$ von ZFC und der Lage von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



Eine Skizze eines Modells $(\mathbf{V}, \in)$ von ZFC und der Lage von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$



Ist ZFC widerspruchsfrei?

Zweiter Gödel'scher Unvollständigkeitssatz, 1931

Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, so gibt es keinen Beweis der Widerspruchsfreiheit von ZFC *auf der Basis von* ZFC.

Ist ZFC widerspruchsfrei?

Zweiter Gödel'scher Unvollständigkeitssatz, 1931

Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, so gibt es keinen Beweis der Widerspruchsfreiheit von ZFC *auf der Basis von* ZFC.

Falls man nun mindestens $+$ und $\cdot$ in der Sprache hat oder definieren kann, gilt: Der zweite Unvollständikeitssatz gilt nicht nur für ZFC, sondern für jedes entscheidbare Axiomensystem T (das mit ZFC nichts zu tun haben muss), für dessen einstelliges Prädikat $\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$, „$\varphi$ mit Gödelnummer $\ulcorner\varphi\urcorner$ ist beweisbar aus T", die sogenannten Löb-Axiome (Martin Hugo Löb, 1921–2006) gelten.

L1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$

L2 $T \vdash (\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi \rightarrow \psi\urcorner)) \rightarrow \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\psi\urcorner))$

L3 $T \vdash \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \mathrm{Bew}_T(\ulcorner\mathrm{Bew}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

Beweisbarkeitsprädikat, Kodierung von Formeln, Lügner-Sätze

Skizze einer Skizze des zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes
T beweist φ wird geschrieben als $T \vdash \varphi$.

Für entscheidbares T sei $\mathrm{Con(T)}$ die Formel $\neg \mathrm{Bew}_T(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$.

Beweisbarkeitsprädikat, Kodierung von Formeln, Lügner-Sätze

Skizze einer Skizze des zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatzes
T beweist φ wird geschrieben als $T \vdash \varphi$.

Für entscheidbares T sei $\mathrm{Con(T)}$ die Formel $\neg\mathrm{Bew}_T(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner)$.
Dann lautet der Satz: $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$
Lügner-Satz:
„ψ ist beweisbar genau dann, wenn ψ falsch ist"
liefert einen Satz, der aus T nicht folgt, falls T widerspruchsfrei ist.
Die Anwendung der Löb-Axiome auf einen Fixpunkt φ mit $\varphi \leftrightarrow (\mathrm{Bew}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to 0 \neq 0)$, liefert, dass auch $\mathrm{Con}(T)$ nicht aus T herleitbar ist.

Axiomensysteme, für die der zweite G. Unv. Satz nicht herleitbar ist

Gibt es auch, aber die werden mit Tricks hergestellt. Löb-Axiome sind bei natürlichen Axiomensystemen meistens erfüllt
Außerdem:
Dass ($T \nvdash$ „T ist widerspruchfrei") nicht herleitbar ist, beweist nicht $\neg(T \nvdash \mathrm{Con}(T))$ (was ($T \vdash$ „T ist widerspruchfrei" wäre)

Giuseppe Peano (1858-1932)
Die Peano-Axiome sagen, dass es eine (unendliche) Menge $\mathbb{N}$ gibt
mit einem Element 0
und einer injektiven Nachfolgerfunktion $x \mapsto x+1$,
in deren Bild alle Elemente außer der 0 liegen
und für die das folgende zweitstufige Induktionsaxiom gilt:

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow X = \mathbb{N})$$

Axiomensysteme für einen Teil der Zahlentheorie

Giuseppe Peano (1858-1932)
Die Peano-Axiome sagen, dass es eine (unendliche) Menge $\mathbb{N}$ gibt mit einem Element 0
und einer injektiven Nachfolgerfunktion $x \mapsto x+1$,
in deren Bild alle Elemente außer der 0 liegen
und für die das folgende zweitstufige Induktionsaxiom gilt:

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow X = \mathbb{N})$$

Wenn man im zweitstufigen Induktionsaxiom nur definierbare Teilmengen zulässt, erhält man das Axiomensystem, das als „Peano-Arithmetik" (kurz PA) bekannt ist. PA ist erststufig, und die zweitstufigen Peano-Axiome sind eine konservative Erweiterung von PA.

ZFC beweist die Widerspruchsfreiheit der Peano-Axiome

Man rechnet nach, dass auf der Basis von ZFC gilt
„$(\mathbb{N}, 0, x \mapsto x+1)$ erfüllt alle Peano-Axiome."

Wir haben also
ZFC $\vdash$ „es gibt ein Modell der Peano-Axiome"

Nach der leichten Richtung des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes erhalten wir hieraus:
ZFC $\vdash$ „die Peano-Axiome sind widerspruchsfrei"

Allgemein: Beweis der Widerspruchsfreiheit durch Bereitstellung von Modellen, I

1. Typ: T beweist die Konsistenz von S:
T beweist „ S ist widerspruchsfrei",
wenn man auf der Basis von T ein Modell für S konstruieren kann.

Allgemein: Beweis der Widerspruchsfreiheit durch Bereitstellung von Modellen, I

1. Typ: T beweist die Konsistenz von S:
T beweist „ S ist widerspruchsfrei",
wenn man auf der Basis von T ein Modell für S konstruieren kann.

Beispiel: ZFC beweist die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik, der Analysis....

Allgemein: Beweis der Widerspruchsfreiheit durch Bereitstellung von Modellen, I

1. Typ: T beweist die Konsistenz von S:
T beweist „ S ist widerspruchsfrei",
wenn man auf der Basis von T ein Modell für S konstruieren kann.

Beispiel: ZFC beweist die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik, der Analysis....

Über ZFC hinaus: ZFC $\cup$ {es gibt eine stark unerreichbare Kardinalzahl} beweist die Widerspruchsfreiheit von ZFC.

Beweis der Widerspruchsfreiheit durch Bereitstellung von Modellen, II

2. Typ: Auf derselben Konsistenzstärkenstufe
Häufig ist der Typ:

$$\mathsf{B} + \mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(\mathrm{S}).$$

Man kann nun auch nach der Umkehrung fragen und erhält so die Äquivalenzklassen der Äquikonsistenz auf der Basis von B. Die klassischen Beispiele sind die sogenannten Beweise relativer Konsistenz (im Jargon: relative Konsistenzbeweise)

$$\mathsf{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \varphi),$$

was äquivalent ist zu

$$\mathsf{ZFC} \nvdash \neg\varphi.$$

Beispiele:
Fraenkel, Mostowski, ca. 1950: ZF ohne Fundierung und ZF
Gödel, 1938: ZF und ZFC und ZFC $+ |\mathbb{R}| = \aleph_1$
Cohen, 1963: ZFC und ZFC $+ |\mathbb{R}| > \aleph_1$

Ein Ausschnitt aus der Konsistenzstärkenhierarchie

$\vdots$

ZFC und „es gibt eine messbare Kardinalzahl"

ZFC und „es gibt stark unerreichbare Kardinalzahl"

ZFC

Analysis

Peano-Arithmetik

$\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +)$, jede endliche Struktur

zurück zur heutigen Lage

Vor- und Nachteile schwächerer Axiomensysteme

Vorteile: Weniger gefährlich, da von höheren Systemen aus vielleicht widerspruchfrei. Weniger gefährlich, da man vielleicht gerade den Widerspruch nicht herleiten kann.

Vor- und Nachteile schwächerer Axiomensysteme

Vorteile: Weniger gefährlich, da von höheren Systemen aus vielleicht widerspruchfrei. Weniger gefährlich, da man vielleicht gerade den Widerspruch nicht herleiten kann.

Nachteile: Man kann weniger beweisen und weniger modellieren. Echt weniger?

Vor- und Nachteile schwächerer Axiomensysteme

Vorteile: Weniger gefährlich, da von höheren Systemen aus vielleicht widerspruchfrei. Weniger gefährlich, da man vielleicht gerade den Widerspruch nicht herleiten kann.

Nachteile: Man kann weniger beweisen und weniger modellieren. Echt weniger?

Der Beweis der Nichtbeweisbarkeit $S \not\vdash \varphi$:

Muster A:
Man zeigt, dass jeder endliche Teil von $S \cup \{\neg\varphi\}$ ein mengengroßes Modell hat.

Muster B:
Wenn φ aus S beweisbar wäre, dann könnte S auch den Satz „S is widerspruchsfrei" beweisen. Dann nimmt man den zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz.

Natürliche Beispiele für $T \vdash \varphi$ und $S \nvdash \varphi$ für zwei Axiomensysteme $S \subseteq T$

Ramsey-Satz von Paris und Harrington (1971), der in PA nicht beweisbar ist und in ZFC beweisbar ist.

Natürliche Beispiele für $T \vdash \varphi$ und $S \nvdash \varphi$ für zwei Axiomensysteme $S \subseteq T$

Ramsey-Satz von Paris und Harrington (1971), der in PA nicht beweisbar ist und in ZFC beweisbar ist.

Goodstein-Folgen. (Reuben Goodstein 1912–1985)

Satz von Goodstein, 1944

Jede Goodstein-Folge ist nach endlich vielen Schritten bei 0.

Kirby und Paris, 1982

Die Konvergenz von Goodstein-Folgen kann nicht in PA *bewiesen werden. Es gilt: (*PA $\vdash$ *Konvergenz von Goodstein-Folgen) impliziert (*PA $\vdash$ „PA *ist widerspruchsfrei.")*

Goodsteinfolgen, I

Sei $d > 1$ eine Basis, und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $[n]_d$ die Darstellung von n zur Basis d. Beispiel:

$$[23]_2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Nun schreiben wir auch die Exponenten wieder in der Basis d, und die Exponenten von den Exponenten, usf, bis dieser Prozess ausgeschöpft ist, und erhalten so die Superdarstellung von n zur Basis d, geschrieben $[[n]]_d$. Beispiel

$$[[23]]_2 = 2^{(2^{(2^1)})} + 2^{(2^1)} + 2^1 + 2^0.$$

Goodsteinfolgen, II

Sei $d > 1$ ein fester, aber beliebiger Startpunkt. Simultan definieren wir für alle d durch Induktion über n:
Wenn $n = 0$, so $G(d, n) = 0$.
Wenn $n \geq 1$, so ist $G(d, n)$ die Zahl, die man erhält, in dem man in der Superdarstellung $[[n]]_d$ von n zur Basis d alle vorkommenden d durch $d + 1$ ersetzt und von der dadurch resultierenden Zahl 1 subtrahiert.

Definition

Induktiv über ℓ definieren wir die mit n beginnende Goodsteinfolge:
$n_0 := n$
wenn $n_\ell = 0$, so $n_{\ell+1} = 0$; sonst $n_{\ell+1} := G(\ell + 1, n_\ell)$.

Goodstein, 1944

$\forall n \exists \ell n_\ell = 0$.

zweitstufiges Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen

„Starke" mathematische Wahrheiten in der Schule

zweitstufiges Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen

Infinitesimalrechnung, $\mathbb{R}$, Vollständigkeit, Mittelwertsatz, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\mathbb{R}))$

„Starke" mathematische Wahrheiten in der Schule

zweitstufiges Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen

Infinitesimalrechnung, $\mathbb{R}$, Vollständigkeit, Mittelwertsatz, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\mathbb{R}))$

folgenstetig ist ε-δ-stetig (Auswahlaxiom für abzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{R}$)

„Starke" mathematische Wahrheiten in der Schule

zweitstufiges Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen

Infinitesimalrechnung, $\mathbb{R}$, Vollständigkeit, Mittelwertsatz, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\mathbb{R}))$

folgenstetig ist ε-δ-stetig (Auswahlaxiom für abzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{R}$)

jeder Vektorraum hat eine Basis (auf der Basis von ZF ist diese Forderung äquivalent zum Auswahlaxiom, Blass 1984)

„Starke" mathematische Wahrheiten in der Schule

zweitstufiges Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen

Infinitesimalrechnung, $\mathbb{R}$, Vollständigkeit, Mittelwertsatz, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\mathbb{R}))$

folgenstetig ist ε-δ-stetig (Auswahlaxiom für abzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{R}$)

jeder Vektorraum hat eine Basis (auf der Basis von ZF ist diese Forderung äquivalent zum Auswahlaxiom, Blass 1984)

und dazu noch die starken klassischen Beweisregeln.

Erfahrung mit ZFC und Erweiterungen von ZFC

große Kardinalzahlen, bis zu "on the verge of inconsistency", Kanamori

springe zur Konsistenzstärkenhierarchie

Erfahrung mit ZFC und Erweiterungen von ZFC

große Kardinalzahlen, bis zu "on the verge of inconsistency", Kanamori

springe zur Konsistenzstärkenhierarchie

ein anderthalbjähriger Irrweg aus den 1970er Jahren. Vorschlag: Es gibt eine elementare Einbettung des Universums in sich.
Kunen 1971: Die Zielstruktur ist dünner.

Erfahrung mit ZFC und Erweiterungen von ZFC

große Kardinalzahlen, bis zu "on the verge of inconsistency", Kanamori

springe zur Konsistenzstärkenhierarchie

ein anderthalbjähriger Irrweg aus den 1970er Jahren. Vorschlag: Es gibt eine elementare Einbettung des Universums in sich.
Kunen 1971: Die Zielstruktur ist dünner.

Pionierarbeit durch Georg Cantor, 1845–1918
Ein Zitat aus: David Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. 95 (1926)

> *„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können."*

Erfahrung mit ZFC und Erweiterungen von ZFC

große Kardinalzahlen, bis zu "on the verge of inconsistency", Kanamori

springe zur Konsistenzstärkenhierarchie

ein anderthalbjähriger Irrweg aus den 1970er Jahren. Vorschlag: Es gibt eine elementare Einbettung des Universums in sich.
Kunen 1971: Die Zielstruktur ist dünner.

Pionierarbeit durch Georg Cantor, 1845–1918
Ein Zitat aus: David Hilbert, *Über das Unendliche*, Math. Ann. 95 (1926)

> *„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können."*

Dieses Zitat steht auf der dritten Titelseite in Jechs Lehrbuch Set Theory von 1978. Darunter steht in der Ausgabe der Bücherei in Berkeley:
"you will soon see that it is not a paradise and leave it on your own"

Unsere heutige Lage

Seit der Aufstellung Axiome in den Jahren 1872 –1930 (etwa) wurde kein Widerspruch aus ZFC hergeleitet.

Gödel, 1931: Wenn ZFC widerspruchfrei ist, dann ZFC $\nvdash$ „ZFC ist widerspruchsfrei"

Seit 1963: Viele unterschiedliche ZFC-Modelle

(Paul Cohen 1934–2007)

Cohen, 1963

$\mathsf{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + |\mathbb{R}| > \aleph_1)$

Seit 1963 erarbeitete man eine Fülle von ZFC-Modellen, in denen zum Teil unterschiedliche (erststufige) Sätze wahr sind.
Beispiel: Es gibt genau $\aleph_1$ reelle Zahlen. Es gibt genau $\aleph_2$ reelle Zahlen.
Auslotungen relativer Konsistenzen und Bestimmung von Konsistenzstärken (zumindest bis zu ω Woodin-Kardinalzahlen gibt es auch Abschätzungen nach unten).

Dank und Anregungen

Dank gilt meinem Mathematiklehrer, der im Leistungskurs Mathematik im Jahr 1982 die Russell'sche Antinomie mit Beweis unserer Klasse erzählt hat.

Literatur I

Lehrbücher:

Akihiro Kanamori: Large Cardinals, Springer, 2000

Kenneth Kunen: Set Theory, An introduction to independence proofs. North-Holland, 1980

Thomas Jech: Set Theory, first ed. 1978, Academic Press. Set Theory, The Third Millenium Edition, Springer, 2003.

Martin Ziegler: Mathematische Logik, Birkhäuser, 2010

Artikel:

JSL: The Journal of Symbolic Logic

Bezboruah, Shepherdson: Gödel's Second Incompleteness Theorem for Q, JSL 41, 1976

Solomon Feferman: Arithmetization of Metamathematics in a General Setting, Fund. Math 49, 1960

Kurt Gödel, Monatshefte der Mathematik 1930, 1931

Literatur II

Martin Löb, Solution of a Problem of Leon Henkin, JSL 20, 1955
Reuben Goodstein, On the Restricted Ordinal Theorem, JSL 9, 1944
Laury Kirby and Jeff Paris, Accessible Independence Results for Peano Arithmetic, Bull. London Math. Soc. 14, 1982

Vorlesungs-Skripte:
Jörg Flum: Mengenlehre 2010/2011
Mildenberger: Axiomatische Mengenlehre Sommersemester 2011
Martin Ziegler: Mathematische Logik
(zum Runterladen von den Webseiten der Autoren)