Sitzverteilungsverfahren

Heike Mildenberger

Studierendenkolloquium des Mathematischen Instituts
Universität Freiburg, 4.7.2024

Verhältniswahl

Auf den Glossar-Webseiten des Deutschen Bundestages:

„Von einer Verhältniswahl spricht man, wenn die Wahlämter genau im Verhältnis der abgegebenen Stimmen besetzt werden. Bei einer reinen Verhältniswahl erhält also eine Partei, die bei Parlamentswahlen zehn Prozent der Stimmen erhält, auch zehn Prozent der Parlamentssitze. ”

Verhältniswahl

Auf den Glossar-Webseiten des Deutschen Bundestages:

„Von einer Verhältniswahl spricht man, wenn die Wahlämter genau im Verhältnis der abgegebenen Stimmen besetzt werden. Bei einer reinen Verhältniswahl erhält also eine Partei, die bei Parlamentswahlen zehn Prozent der Stimmen erhält, auch zehn Prozent der Parlamentssitze. "

$\ell \geq 2$ sei die Anzahl der Parteien.

x_i (vorläufige) Sitze für Partei i, $i = 1, \ldots, \ell$.

$v_i > 0$ Stimmen für Partei i, $i = 1, \ldots, \ell$. Falls eine Partei null Stimmen erhält, lässt man die Partei i aus dem Verfahren und gibt ihr null Sitze.

h Hausgröße, Anzahl der Sitze (Wahlämter).

$v_+ = \sum_{i=1}^{\ell} v_i$.

Dann sagt der Text: $\boxed{x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h.}$

Dies geht natürlich nur, wenn alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ natürliche Zahlen sind.

Zwei Beispiele

1. Zwei Parteien, Hausgröße 11 und Gleichstand in den Stimmen.

Definition

Die Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ mit $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{N} \,:\, z \leq x\}$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}$ heißt *Abrundungsfunktion*.

2. Ein Beispiel mit einen großem Losverfahren.

ℓ Parteien und Hausgröße $z \cdot \ell + \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$ für ein $z \in \mathbb{N}$ und $v_1 = \cdots = v_\ell$.
(Dann ist $v_i = z + \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor \frac{1}{\ell}$.)

Man kann per Los $\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$ „glückliche Parteien" auswählen, die jeweils $\lfloor \frac{v_1}{v_+} \cdot h \rfloor + 1$ Stimmen erhalten. Die nicht Ausgewählten erhalten jeweils nur $\lfloor \frac{v_1}{v_+} \cdot h \rfloor$ Simmen. Es gibt also $\binom{\ell}{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor}$ gleichwertige Lösungen.

Wir sehen später mit Beweis: Nicht nur bei tatsächlichem Gleichstand gibt es Wahlausgänge, in denen man schlichtweg losen muss. Bei großer Wählerzahl kommen sie mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit vor.

Wie verfährt man, wenn nicht alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganzzahlig sind?

- Wir führen einen bis jetzt unbekannten Sitzverteilungsvektor $(x_1, \ldots, x_\ell)$ ein. Dieser muss $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ nahekommen, aber ganzzahlig sein.

Wie verfährt man, wenn nicht alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganzzahlig sind?

- Wir führen einen bis jetzt unbekannten Sitzverteilungsvektor $(x_1, \ldots, x_\ell)$ ein. Dieser muss $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ nahekommen, aber ganzzahlig sein.
- Wir betrachten in diesem Vortrag nur Verfahren, die h fest lassen, also $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = h$ ergeben.

Wie verfährt man, wenn nicht alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganzzahlig sind?

- Wir führen einen bis jetzt unbekannten Sitzverteilungsvektor $(x_1, \ldots, x_\ell)$ ein. Dieser muss $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ nahekommen, aber ganzzahlig sein.
- Wir betrachten in diesem Vortrag nur Verfahren, die h fest lassen, also $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = h$ ergeben.
- Alle vorgestellten Verfahren erfüllen die Proporzgleichung $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ für $i = 1, \ldots, \ell$, falls alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganz sind.

Wie verfährt man, wenn nicht alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganzzahlig sind?

- Wir führen einen bis jetzt unbekannten Sitzverteilungsvektor $(x_1, \ldots, x_\ell)$ ein. Dieser muss $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ nahekommen, aber ganzzahlig sein.
- Wir betrachten in diesem Vortrag nur Verfahren, die h fest lassen, also $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = h$ ergeben.
- Alle vorgestellten Verfahren erfüllen die Proporzgleichung $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ für $i = 1, \ldots, \ell$, falls alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganz sind.
- $\frac{v_i}{v_+}$ wird am Anfang nie gerundet bei allen unseren vorgestellten Verfahren.

Wie verfährt man, wenn nicht alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganzzahlig sind?

- Wir führen einen bis jetzt unbekannten Sitzverteilungsvektor $(x_1, \ldots, x_\ell)$ ein. Dieser muss $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ nahekommen, aber ganzzahlig sein.
- Wir betrachten in diesem Vortrag nur Verfahren, die h fest lassen, also $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = h$ ergeben.
- Alle vorgestellten Verfahren erfüllen die Proporzgleichung $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ für $i = 1, \ldots, \ell$, falls alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganz sind.
- $\frac{v_i}{v_+}$ wird am Anfang nie gerundet bei allen unseren vorgestellten Verfahren.
- Bei Gleichstand entscheidet dann immer noch das Los.

Wie verfährt man, wenn nicht alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganzzahlig sind?

- Wir führen einen bis jetzt unbekannten Sitzverteilungsvektor $(x_1, \ldots, x_\ell)$ ein. Dieser muss $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ nahekommen, aber ganzzahlig sein.
- Wir betrachten in diesem Vortrag nur Verfahren, die h fest lassen, also $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = h$ ergeben.
- Alle vorgestellten Verfahren erfüllen die Proporzgleichung $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ für $i = 1, \ldots, \ell$, falls alle $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ganz sind.
- $\frac{v_i}{v_+}$ wird am Anfang nie gerundet bei allen unseren vorgestellten Verfahren.
- Bei Gleichstand entscheidet dann immer noch das Los.
- Es geht also um möglichst gut begründete Rundungen und Berechnungen von Vektoren $(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ mit Summe h, deren jeder dem Vektor $(w_1, \ldots, w_\ell)$ mit $w_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$ in einem gewissen Sinn optimal nahekommt.

Einige Sitzverteilungsmethoden (apportionment methods)

Zur Auswertung einer Verhältniswahl.

Proporzverfahren

Hare/Niemeyer

technisch: Hare-Quote mit größten Resten, HaQgrR

Divisorverfahren

d'Hondt

technischer Name DivAbr Divisorverfahren mit Abrundung

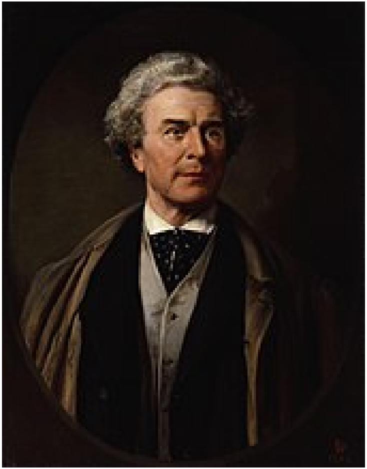
Sainte-Laguë, Schepers, Webster

technischer Name DivStr, Divisorverfahren mit Standardrundung
(kaufmännischer Rundung, Geradzahlrundung)

Weitere Anwendungen

Verhältnismäßige Umrechnung, $(w_1, \ldots, w_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell, \sum w_i = w$. Nun soll ein $(\frac{w_1}{w}, \ldots, \frac{w_\ell}{w})$ möglichst naher Vektor zur Angabe in Prozentzahlen mit nur 2 Nachkommastellen berechnet werden. Dies entspricht dem Sitzverteilungsproblem mit Hausgröße 10000.

Thomas Hare und Horst Niemeyer


(Quelle: Wikipedia)

Thomas Hare (1806 bis 1891) war ein britischer Jurist und politischer Aktivist.

Horst Friedrich Niemeyer (1931 bis 2007), deutscher Mathematiker

Das Hare/Niemeyer-Verfahren

Definition

Die Funktion $x \mapsto \lceil x \rceil$ mit $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{N} \ : \ z \geq x\}$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}$ heißt *Aufrundungsfunktion*.

Algorithmus

- *Berechne für $i = 1, \ldots, \ell$ die vorläufige Sitzzahl $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$, und berechne auch $\lfloor x_i \rfloor$.*
- $d = \sum_{i=1}^{\ell}(x_i - \lfloor x_i \rfloor) = h - \sum_{i=1}^{\ell} \lfloor x_i \rfloor$. $d < \ell$.
- *Ordne $x_i - \lfloor x_i \rfloor$, $i = 1, \ldots, \ell$, nach der Größe. Gebe den ersten d Parteien jeweils $\lceil x_i \rceil$ Sitze, und den folgenden $\ell - d$ Parteien jeweils $\lfloor x_i \rfloor$ Sitze.*

  Gleichstand ist möglich, wenn die ersten d Parteien nicht bestimmt sind.

Gute Eigenschaften von Sitzzuteilungsverfahren

Anonymität

Eine Zuteilungsmethode heißt *anonym*, falls jede Umsortierung des Votenvektors v dieselbe Umsortierung der Sitzevektoren x nach sich zieht.

Gute Eigenschaften von Sitzzuteilungsverfahren

Anonymität

Eine Zuteilungsmethode heißt *anonym*, falls jede Umsortierung des Votenvektors v dieselbe Umsortierung der Sitzevektoren x nach sich zieht.

Balanciertheit

Eine Zuteilungsmethode heißt *balanciert*, falls die Sitzzahlen zweier gleichstarker Parteien sich höchstens um einen Sitz unterscheiden.

Gute Eigenschaften von Sitzzuteilungsverfahren

Anonymität

Eine Zuteilungsmethode heißt *anonym*, falls jede Umsortierung des Votenvektors v dieselbe Umsortierung der Sitzevektoren x nach sich zieht.

Balanciertheit

Eine Zuteilungsmethode heißt *balanciert*, falls die Sitzzahlen zweier gleichstarker Parteien sich höchstens um einen Sitz unterscheiden.

Konkordanz

Eine Zuteilungsmethode heißt *konkordant*, falls von zwei Parteien die stärkere mindestens so viele Sitze bekommt wie die schwächere.

Fortsetzung

Homogenität

Eine Zuteilungsmethode heißt *homogen*, falls die Lösungsmenge $A(v, h)$ der möglichen Zuteilungen konstant bleibt, wenn der Votenvektor skaliert wird: $A(v, h) = A(bv, h)$ für alle $b > 0$.

Homogenität

Eine Zuteilungsmethode heißt *homogen*, falls die Lösungsmenge $A(v, h)$ der möglichen Zuteilungen konstant bleibt, wenn der Votenvektor skaliert wird: $A(v, h) = A(bv, h)$ für alle $b > 0$.

Exaktheit

Eine Zuteilungsmethode heißt *exakt*, falls jeder ganzzahlige Votenvektor $x_i = \frac{v_i}{v_+}h$, der die richtige Summe aufweist, als Lösung nur sich selbst reproduziert:

$$A(x, h) = \{x\}$$

für $x_i = \frac{v_i}{v_+} \cdot h \in \mathbb{N}$.

Schlechte Eigenschaften von Proporzverfahren

Alabama-Paradoxon, **Hausgrößenzuwachsparadoxon**, Anwachsen der Hausgröße führt dazu, dass eine Partei weniger Stimmen bekommt. Für $1 \leq i \leq \ell$, $w_i = v_i \frac{h}{v_+}$.

Beispiel (Pukelsheim2, p 179):

$v = (280; 275; 270; 90; 85)$, $v_+ = 1000$.

$h = 5$

$w = (1{,}4; 1{,}375; 1{,}35; 0{,}45; 0{,}44)$

$x = (1; 1; 1; 1; 1)$.

$h = 6$

$w = (1{,}68; 1{,}65; 1{,}62; 0{,}54; 0{,}51)$

$x = (2; 2; 2; 0; 0)$.

Eigenschaften

Anwachsen der Anzahl der Parteien kann dazu führen, dass eine Partei weniger Stimmen bekommt bei selber Stimmenzahl.
Parteienzuwachsparadoxon.

Stimmenzuwachsparadoxon. Eine Partei erhält bei einer Verteilung eine Stimme weniger als bei einer anderen und trotzdem bei der ersten Verteilung mehr Sitze.

Divisorverfahren

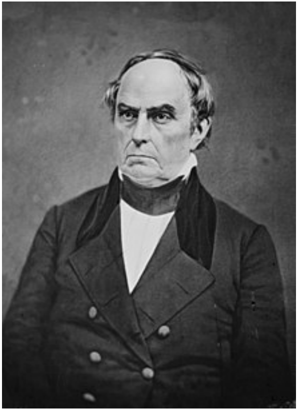
Wir wollen nun eine Familie von Divisorverfahren vorstellen und einiges über sie beweisen.
Hierzu brauchen wir den Begriff einer Rundungsfunktion und der Rundungsregel.
Zum d'Hondt-Verfahren gehört die Abrundung,
zum Sainte Laguë-Verfahren gehören die kaufmännische Rundung und die Geradzahlrundung. (Beide geben das gleiche Verfahren, man fasst die deshalb auch zusammen unter dem Namen Standardrundung.)

Victor d'Hondt


(Quelle: Wikipedia)

Victor D'Hondt (1841 bis 1901) war ein belgischer Jurist.

Die Namensgeber Sainte-Laguë/Schepers, Webster

 (Quelle: Wikipedia)

Daniel Webster (1782 bis 1852), amerikanischer Politiker

André Sainte-Laguë (1882 bis 1950) französischer Mathematiker

Hans Schepers (1928 bis 2021), deutscher Beamter

Zwei weitere Rundungsfunktionen

Definition

Die folgende Rundungsfunktion heißt *kaufmännische Rundung*.

$$\langle x\rangle = \begin{cases} \lceil x\rceil, & \text{wenn } x - \lfloor x\rfloor \geq \frac{1}{2}; \\ \lfloor x\rfloor, & \text{wenn } x - \lfloor x\rfloor < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Definition

Die folgende Rundungsfunktion heißt *Geradzahlrundung*.

$$\langle x\rangle^* = \begin{cases} \lceil x\rceil, & \text{wenn } x - \lfloor x\rfloor > \frac{1}{2} \text{ oder } (x - \lfloor x\rfloor = \frac{1}{2} \text{ und } \lceil x\rceil \text{ gerade}); \\ \lfloor x\rfloor, & \text{wenn } x - \lfloor x\rfloor < \frac{1}{2} \text{ oder } (x - \lfloor x\rfloor = \frac{1}{2} \text{ und } \lfloor x\rfloor \text{ gerade}). \end{cases}$$

Die Sprungstellenfolge einer Rundungsfunktion

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ eine Rundungsfunktion, d.h. monoton und f.a. x, $|f(x) - x| < 1$.

Definition

Die *Sprungstellenfolge der Rundungsfunktion f* ist eine Funktion $s\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}_+$, die definiert ist durch

$$s(n) = \inf\{x \ : \ f(x) \geq n\}.$$

Für jede Rundungsfunktion f gilt: $s(n) \in [n-1, n]$, denn $|f(x) - x| < 1$.

Wir berechnen die Sprungstellen der kaufmännischen Rundung:
Die Sprungstellen sind $0{,}5$, $1{,}5$, $2{,}5$, $3{,}5$, $4{,}5 \ldots$, und an den Sprungstellen sind die Werte $0, 2, 2, 4, 4, \ldots$.

Rundungsregeln

Zu jeder Rundungsfunktion kann man die Menge der Sprungstellen betrachten. Dann kann man die Funktion umwandeln in eine mengenwertige Funktion, die genau an den Sprungstellen die Zweiermenge aus den unteren Wert und dem oberen Wert annimmt, und sonst die Einermenge der ursprünglichen Rundung ist.
So eine mengenwertige Funktion heißt dann Rundungsregel. Bei Rundungsregeln gibt es an den Sprungstellen eine Zweiermenge von Funktionswerten.

Eine spezielle Rundungsregel

Definition

Die folgende Rundungsfunktion heißt *Rundungsregel zur Geradzahlrundung* und zur kaufmännischen Rundung.

$$\langle\!\langle x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x \rangle\!\rangle^* = \begin{cases} \{\langle x \rangle^*\} = \{\langle x \rangle\}, & \text{wenn } x \neq 0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5, \ldots \\ \{x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\}, & \text{wenn } x = 0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5, \ldots \end{cases}$$

Auch zur Abrundungsfunktion (Sprungstellen 1,2,3,. . .) und zur Aufrundungsfunktion (Sprungstellen 0,1,2, . . .) kann man die entsprechenden Rundungsregeln $\llbracket x \rrbracket$ und $\lceil\!\lceil x \rceil\!\rceil$ definieren.

Die Sprungstellenfolge einer Rundungsfunktion bestimmt eine Rundungsregel

Definition

Die Rundungsregel zur Sprungstellenfolge $s = s(1), s(2), s(3), \ldots$ der Rundungsfunktion $[\cdot]$ ist die Abbildung $[\![\cdot]\!]$ von der nichtnegativen Halbachse $\mathbb{R}_+$ in die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, die definiert ist durch

$$[\![x]\!] = \begin{cases} \{n\}, & \text{wenn } x \in (s(n), s(n+1)); \\ \{n-1, n\}, & \text{wenn } x = s(n). \end{cases}$$

Hierbei ergänzen wir $s(0) = 0$, und lesen die letzte Zeile für $n = 0$ ohne die Zahl -1. Die Rundungsregel heißt *durchlässig*, falls $s(1) > 0$.

Die Lösungsmenge eines Divisorverfahrens zu einer Rundungsregel

Definition

Es sei $[\![\cdot]\!]$ eine Rundungsregel. Es sei $v = (v_1, \ldots, v_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_{>0}$ ein Wahlausgang und h die Hausgröße.

Dann ist

$$A(v,h) = \Big\{(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \;:\; \sum x_i = h \text{ und } \exists D > 0, \forall i \in \{1, \ldots, \ell\}, x_i \in \left[\!\!\left[\frac{v_i}{D}\right]\!\!\right]\Big\}$$

die Lösungsmenge zum Divisorverfahren mit Rundungsregel $[\![x]\!]$.

Zur Verifikation einer Lösung x braucht man nur ein D (einen sogenannten Referenzdivisor) anzugeben, die anderen Schritte sind leicht zu sehen.

Man stellt sich vor: $D = \frac{v_+}{h}$. Dann ist $\frac{v_i}{D} = \frac{v_i}{v_+} \cdot h$.

Fragen

$$A(v,h) = \Big\{ (x_1,\dots,x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \;:\; \sum x_i = h \text{ und } \exists D > 0, \forall i \in \{1,\dots,\ell\}, x_i \in \Big[\!\!\Big[\frac{v_i}{D} \Big]\!\!\Big] \Big\}$$

1. Warum ist $A(v,h)$ nicht leer?
2. Wie bestimmt man das Intervall der möglichen D?
3. Warum weicht jede Lösung für jedes i in der Koordinate x_i um "möglichst wenig" von $\frac{v_i}{v_+} \cdot h$ ab?
4. In welchen Fällen gibt es mehr als eine Lösung?
5. In welcher Hinsicht sind Divisorverfahren besser als Proporzverfahren?

Eine äquivalente Beschreibung von $A(v,h)$

Satz (Minimax-Bedingung)

Ein Sitzverteilungsvektor $x \in \mathbb{N}^\ell$ *ist in* $A(v,h)$ *genau dann, wenn* $\sum x_i = h$ *und*

$$\max_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} \le \min_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Beweis: Es seien $x \in A(v,h)$ und D ein bezeugender Divisor. Dann ist für all i, $x_i \in \llbracket \frac{v_i}{D} \rrbracket$. Das heißt für jedes i: $\frac{v_i}{D} \in [s(x_i), s(x_i+1)]$, also

$$s(x_i) \le \frac{v_i}{D} \le s(x_i+1).$$

Wir bilden die Kehrwerte und multiplizieren mit $v_i > 0$. (Falls $s(x_i) = 0$ ist, lässt man es weg.) Wir erhalten

$$\frac{v_i}{s(x_i)} \ge D \ge \frac{v_i}{s(x_i+1)}.$$

Fortsetzung des Beweises

Da dies für alle i gilt, haben wir

$$\max_{1\leq i\leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} \leq \min_{1\leq i\leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Umgekehrt, falls die Gleichung gilt, kann man jedes

$$D \in \left[\max_{1\leq i\leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)}, \min_{1\leq i\leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}\right]$$

als Divisor nehmen und die Äquivalenzumformungen von oben in umgekehrter Reihenfolge durchführen. qed

Inkrementierung, Höchstzahlbetrachtung

Satz (Inkrementierung)

Es sei $x \in A(v,h)$ *und es sei*

$$i \in I(v,x) := \left\{ 1 \leq i \leq \ell \ : \ \frac{v_i}{s(x_i+1)} = \max_{i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} \right\}.$$

Dann ist

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_\ell) \in A(v, h+1).$$

Beweis

Aus $x \in A(v,h)$ folgt nach dem Minimax-Satz

$$\max_{1 \le i \le \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} \le \min_{1 \le i \le \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Wenn nun das Maximum auf der linken Seite an der Stelle i_0 angenommen wird, kann man von x_{i_0} zu $x'_{i_0} = x_{i_0} + 1$ übergehen. Für die anderen Indizes $i \neq i_0$ lässt man $x'_i = x_i$. Man hat also h um eins erhöht.

Beweis

Aus $x \in A(v,h)$ folgt nach dem Minimax-Satz

$$\max_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} \le \min_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Wenn nun das Maximum auf der linken Seite an der Stelle i_0 angenommen wird, kann man von x_{i_0} zu $x'_{i_0} = x_{i_0}+1$ übergehen. Für die anderen Indizes $i \neq i_0$ lässt man $x'_i = x_i$. Man hat also h um eins erhöht.

$$\max_{1\le i\le \ell, i\neq i_0} \frac{v_i}{s(x_i+1)} \le \frac{v_{i_0}}{s(x_{i_0}+1)} = \frac{v_{i_0}}{s(x'_{i_0})} \le \min_{1\le i\le \ell, i\neq i_0} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Da $\frac{v_{i_0}}{s(x'_{i_0}+1)} \le \frac{v_{i_0}}{s(x'_{i_0})}$, hat man

$$\max_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x'_i+1)} \le \frac{v_{i_0}}{s(x'_{i_0})} \le \min_{1\le i\le \ell, i\neq i_0} \frac{v_i}{s(x'_i)}.$$

In anderen Worten

$$\max_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x'_i+1)} \le \min_{1\le i\le \ell} \frac{v_i}{s(x'_i)}.$$ qed

Dekrementierung

Analog zur Inkrementierung beweist man die Dekrementierung.

Satz (Dekrementierung)

Es sei $x \in A(v,h)$ *und es sei*

$$i \in K(v,x) := \left\{ 1 \leq i \leq \ell \;:\; \frac{v_i}{s(x_i)} = \min_{i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i)} \right\}.$$

Dann ist

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \ldots, x_\ell) \in A(v, h-1).$$

Der Höchstzahlalgorithmus

Satz (Existenz von Lösungen)

$A(v, h) \neq \emptyset$.

Beweis:

Bestimme $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_\ell^{(1)}) \in A(v, 1)$. Dies ist nicht leer. Man gibt $x_i^{(1)} = 1$ für eine Partei mit maximalem v_i und setzt alle anderen $x_i^{(1)} = 0$. Erhalte im j-ten Schritt durch Inkrementierung den Vektor $x^{(j)}$, solange, bis $j = h$.

Das Intervall der bezeugenden Divisoren ist

$$\Big[\max_{1 \leq i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i^{(h)} + 1)}, \min_{1 \leq i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i^{(h)})}\Big].$$

Falls wir eine Rundungsregel mit $s(1) = 0$ haben, starte mit $x^{(1)} = (1, 1, \ldots, 1)$. Z.B. die Aufrundungsregel. qed

Ein Verfahren zur Bestimmung eines Elements von $A(v,h)$ und der Menge der zulässigen D in höchstens $\lfloor \ell/2 \rfloor$ Schritten

Algorithmus (Divisorverfahren auf schnelle Art)

- *Starte mit dem empfohlenen Anfangsdivisor D_0. ($D_0 = \frac{v_+}{h}$ für Sainte-Laguë.) Berechne ein $x^{(1)}$ so dass für alle $i \leq \ell$,*

  $$x_i^{(1)} \in \left[\!\left[\frac{v_i}{D_0} \right]\!\right].$$

  Berechne nun $\sum x_i^{(1)} = h^{(1)}$.
  Falls $h^{(1)} = h$, fertig.
- *Falls $h^{(1)} < h$, inkrementiere sukzessive (höchstens $\lfloor \ell/2 \rfloor$ mal) bis $h^{(j)} = h$.*
- *Falls $h^{(1)} > h$, dekrementiere sukzessive bis $h^{(j)} = h$.*

Unsere beiden Divisorverfahren

Man nimmt für Sainte-Laguë $[\![\cdot]\!] = \langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle$. Für d'Hondt nimmt man die Abrundungsregel für $\lfloor\!\lfloor \cdot \rfloor\!\rfloor$ und einen geringfügig kleineren Anfangsdivisor $D_0 = \frac{v_+}{h+\frac{\ell}{2}}$.

Eine gängige Schilderung der Sainte-Laguë-Verfahrens

Es sei $v_1 \geq \cdots \geq v_\ell$. Starte mit $x^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)$. Inkrementiere $h - 1$ mal.

Ausführlich und mit Streckung der Sprungstellen:

Starte mit $h = 1$ und $D = 2 \cdot s(1) = 1$, im n-ten Schritt für $n \leq h$ gehe bilde eine Höchstzahl zu den Divisionen der v_i durch $2 \cdot s(k) = 2k + 1$, $k \leq n$, die noch nicht besetzt ist. Man muss nicht immer neu dividieren, in manchen Schritten findet man in einer früheren Division noch eine Höchstzahl. Wenn beim letzten Sitz mehrere Parteien mit derselben Höchstzahl da sind, entscheidet das Los. Hierzu müssen die letzten $\leq \ell$ Schritte mit betrachtet werden, wie lange in die Vergangenheit der Gleichstand reicht.

Eine gängige Schilderung der Sainte-Laguë-Verfahrens, II

Der Faktor, mit dem man die $s(j)$ streckt, ist irrelevant.

Warum nimmt man gerade ein Vielfaches der Sprungstellen zur Standardrundung? Da die kaufmännische Rundung gerechter ist als die Abrundung, die zum d'Hondt'schen Divisorverfahren gehört und kleinere Parteien benachteiligt. (Folie 38)

D'Hondt-Verfahren als Höchstzahlenschema

$h = 10$. $v_+ = 1000$, $v_+/h = 100$ (Von der Wikipedia)

Partei	A	B	C	D
Stimmen	416	335	160	89
Vergleichszahlen				
Stimmen/1	$\boxed{1}$ 416	$\boxed{2}$ 335	$\boxed{5}$ 160	$\boxed{9}$ 89
Stimmen/2	$\boxed{3}$ 208	$\boxed{4}$ 167	80	44
Stimmen/3	$\boxed{6}$ 138	$\boxed{7}$ 111	53	29
Stimmen/4	$\boxed{8}$ 104	$\boxed{10}$ 83,8	40	22
Stimmen/5	83,2	67	32	17
Auszählung				
Sitze	4	4	1	1

Eingerahmt sind die Sitzvergaben. ($D_0 = \frac{v_+}{h+\ell/2}$, runden.)

$$D\text{-Interval} = \left[\max_{i\leq\ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)}; \min_{i\leq\ell} \frac{v_i}{s(x_i)}\right] = [83{,}2;\ 83{,}8].$$

Sainte-Laguë-Verfahren als Höchstzahlenschema

$h = 10$ mit selbem Beispiel, $D_0 = 100 = v_+/h \in D$-Intervall!

Partei	A	B	C	D
Stimmen	416	335	160	89
Vergleichszahlen				
Stimmen/$(2 \cdot s(1))$	$\boxed{1}$ 416	$\boxed{2}$ 335	$\boxed{3}$ 160	$\boxed{6}$ 89
Stimmen/3	$\boxed{4}$ 138	$\boxed{5}$ 111	$\boxed{10}$ 53	29
Stimmen/5	$\boxed{7}$ 83,2	$\boxed{8}$ 67	32	17
Stimmen/7	$\boxed{9}$ 59,42	47,86	32	17
Stimmen/9	46,22			
Auszählung				
Sitze	4	3	2	1

Eingerahmt sind die Sitzvergaben. Schneller: D_0 und runden.

$$D\text{-Interval} = \left[\max_{i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)}; \min_{i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}\right] = [46{,}22 \cdot 2;\ 59{,}52 \cdot 2].$$

Synopse der Vergleichszahlentabellen

$h = 10$. $v_+ = 1000$, $v_+/h = 100$ (Von der Wikipedia)

Partei	A	B	C	D
Stimmen	416	335	160	89
Stimmen/1	$\boxed{1}$ 416	$\boxed{2}$ 335	$\boxed{5}$ 160	$\boxed{9}$ 89
Stimmen/2	$\boxed{3}$ 208	$\boxed{4}$ 167	80	44
Stimmen/3	$\boxed{6}$ 138	$\boxed{7}$ 111	53	29
Stimmen/4	$\boxed{8}$ 104	$\boxed{10}$ 83,8	40	22
Stimmen/5	83,2	67	32	17
Stimmen/$(2 \cdot s(1))$	$\boxed{1}$ 416	$\boxed{2}$ 335	$\boxed{3}$ 160	$\boxed{6}$ 89
Stimmen/3	$\boxed{4}$ 138	$\boxed{5}$ 111	$\boxed{10}$ 53	29
Stimmen/5	$\boxed{7}$ 83,2	$\boxed{8}$ 67	32	17
Stimmen/7	$\boxed{9}$ 59,42	47,86	32	17
Stimmen/9	46,22			

Wann entscheidet das Los beim Divisorverfahren?

Satz (Gleichstand)

$1 \leq |A(v,h)| \leq 2^\ell$ *und* $|A(v,h)| \geq 2$ *genau dann, wenn für alle* $x \in A(v,h)$,

$$\max_{i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} = D = \min_{i < \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Beweis der Rückwärtsrichtung

Die Minimax-Ungleichung sei also eine Gleichung. Unter der Gleichheit gibt es $1 \leq i \neq j \leq \ell$, so dass

$$\max_{1 \leq i \leq \ell} \frac{v_i}{s(x_i+1)} = \frac{v_i}{s(x_i+1)} = \frac{v_i}{s(x_j)} = \min_{1 \leq i < \ell} \frac{v_i}{s(x_i)}.$$

Man kann nun nach der Inkrementierung x_i durch $x'_j = x_i + 1$ ersetzen und gleichzeitig nach der Dekrementierung x_j durch $x'_j = x_j - 1$ ersetzen und alle anderen Koordinaten von x' we die in x lassen. Dann stimmt die Minimax-Gleichung auch für x'.

Skizze der Vorwärtsrichtung des Beweises

Umgekehrt: Wenn man zwei solche Ersetzungen und also ein Paar von Lösungen $x, x' \in A(v,h)$ hat mit mindestens einer Abweichung, also mindestens zwei Abweichungen, mit womöglich verschiedenen D_x, $D_{x'}$, dann ergibt sich aus $x_i \in [\![\frac{v_i}{D_x}]\!]$ und $x'_i \in [\![\frac{v_i}{D_{x'}}]\!]$ folgendes. Es sei $x_i = x'_i + 1$. Man hat $\frac{v_i}{D_x} \in [s(x_i), s(x_i+1)]$ und $\frac{v_i}{D_{x'}} \in [s(x'_i), s(x'_i+1)] = [s(x_i-1), s(x_i)]$. Es sei $x_j = x'_j - 1$. Man hat $\frac{v_j}{D_x} \in [s(x_j), s(x_j+1)]$ und $\frac{v_j}{D_{x'}} \in [s(x'_j), s(x'_j+1)] = [s(x_j+1), s(x_j+2))]$. Alle vier Elementbeziehungen zusammen sind nur erfüllbar, wenn $D_x = D_{x'} = \frac{v_i}{s(x_i)} = \min = \frac{v_j}{s(x_j+1)} = \max = \frac{v_i}{s(x'_i+1)} = \max = \frac{v_j}{s(x'_j)} = \min$.

Verzerrtheit, Bias

Definition

Wir fassen den geordneten Wahlausgang $v_{i(1)} \geq v_{i(2)} \geq \cdots \geq v_{i(\ell)}$ als Zufallsvariable $V_1, \ldots, V_k$ auf. Die in einem Verfahren diesem zufälligen Ausgang zugeordneten Stimme schreiben wir als Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_\ell$.

$$B(k) = \lim_{h \to \infty} E\Big[X_k - V_k \cdot \frac{h}{v_+} \,|\, V_1 \geq V_2 \geq \cdots \geq V_\ell\Big]$$

heißt Verzerrung für die k-t größte Partei.

Satz

Sainte-Laguë/Schepers und Hare/Niemeyer sind unverzerrt $B(k) = 0$.
D'Hondt ist zugunsten der großen v_i verzerrt. (Polyá, 1919)

Fehlermaße und Optimalität

Satz (Sainte-Laguë, 1910)

Der Fehler aus Wählersicht

$$f^1_{v,h}(x) = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \frac{1}{v_i} \cdot \left(x_i - v_i \frac{h}{v_+}\right)^2$$

ist unter allen Zuteilungsverfahren minimal für das Divisorverfahren mit Standardrundung, also das Sainte-Laguë-Verfahren.

Satz (Sainte-Laguë, 1910)

Der Fehler aus Abgeordnetensicht

$$f^2_{v,h}(x) = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \frac{1}{x_i} \cdot \left(x_i - v_i \frac{h}{v_+}\right)^2$$

ist unter allen Zuteilungsverfahren minimal für das Divisorverfahren mit geometrischer Rundung mit Sprungstellen $s_{\text{geo}}(n) = \sqrt{n(n-1)}$.

Fehlermaße und Optimalität

Satz (Sainte-Laguë, 1910)

Der Fehler aus Parteiensicht

$$f^3_{v,h}(x) = \sum_{1 \leq i \leq \ell} (x_i - v_i \frac{h}{v_+})^2$$

ist unter allen Zuteilungsverfahren minimal für das Hare/Niemeyer Verfahren.

Literatur

1) Friedrich Pukelsheim, Sitzzuteilungsmethoden, Spinger, 2016. (pdf-Datei über die UB.)

2) Friedrich Pukelsheim, Proportional Representation, Second Edition, Spinger, 2017. (pdf-Datei über die UB.)

3) Englische und deutsche Wikipedia