Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Luca Motto Ros

06.07.2011

Übungen zur Vorlesung Axiomatische Mengenlehre

SS 2011, Übungsblatt 10

In den folgenden Übungen seien M ein abzählbares transitives Modell von ZFC *und $P \in M$ eine Forcing-Halbordnung.*

Aufgabe 1: Seien F eine Gruppe von Automorphismen von P, $\mathscr{F}$ ein normaler Filter auf F, $\Vdash_{M,P,\mathscr{F}}$ die Forcingrelation relativiert auf $M_{\mathscr{F}}[G]$, und $\phi(x, v, y_1, \ldots, y_n)$ eine Formel. Zeigen Sie, dass für alle erblich symmetrischen Namen $\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n$ der Name

$$\rho = \{\langle \pi, p\rangle \in \mathrm{dom}(\sigma) \times P \mid p \Vdash_{M,P,\mathscr{F}} (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n))\}$$

erblich symmetrisch ist. Daher erfüllt $M_{\mathscr{F}}[G]$ das Aussonderungsschema.

Aufgabe 2: Sei X eine Menge. Wir definieren die folgenden schwächeren Varianten des Auswahlaxioms:

(a) $\mathsf{AC}_\omega(X)$ — *Abzählbares Auswahlsaxiom auf X* (*Axiom of countable choice over X*): Für jedes $\{P_n \mid n \in \omega\}$ mit $P_n \subseteq X$, es gibt eine Funktion $f \colon \omega \to V$, so dass $\forall n \in \omega\,(f(n) \in P_n)$.

(b) $\mathsf{DC}(X)$ — *Abhängige-Auswahlen-Axiom auf X* (*Axiom of dependent choice over X*): Für jedes $R \subseteq X \times X$ mit $\forall x \in X\, \exists y \in x\,(\langle x, y\rangle \in R)$ es gibt eine Folge $\langle x_n \mid n \in \omega\rangle$ mit $\forall n \in \omega\,(\langle x_n, x_{n+1}\rangle \in R)$.

(c) AC_ω — *Abzählbares Auswahlsaxiom* (*Countable choice axiom*): Für alle Mengen X, $\mathsf{AC}_\omega(X)$.

(d) DC — *Abhängiges Auswahlsaxiom* (*Dependent choice axiom*): Für alle Mengen X, $\mathsf{DC}(X)$.

Zeigen Sie: Wenn es eine surjektive Funktion $f \colon Y \to X$ gibt, dann $\mathsf{AC}_\omega(Y) \Rightarrow \mathsf{AC}_\omega(X)$ und $\mathsf{DC}(Y) \Rightarrow \mathsf{DC}(X)$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass $\mathsf{AC} \Rightarrow \mathsf{DC}$ und $\mathsf{DC} \Rightarrow \mathsf{AC}_\omega$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{AC}_\omega(\mathbb{R}))$.

Hinweis: Im Beweis von Satz 9.8 kodieren Sie die abzählbare Menge der reellen Zahlen a_n in einer einzigen reellen Zahl.

Abgabe am Montag, den 25.07.2011, in und vor der Vorlesung.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ss11mengenlehre.html