Abteilung für Mathematische Logik 20.07.2011
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Luca Motto Ros

Übungen zur Vorlesung Axiomatische Mengenlehre

SS 2011, Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Sei $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl. $\diamondsuit_\kappa$ ist die folgende Aussage: Es gibt eine Folge $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa, \lim(\alpha)\rangle$, so dass für jedes α, $S_\alpha \subseteq \alpha$ und für jede Teilmenge X von κ die Menge

$$\{\alpha \in \kappa \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

stationär in κ ist. Zeigen Sie, dass $\diamondsuit_\kappa \Rightarrow 2^{<\kappa} = \kappa$.

Aufgabe 2: Sei $P = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$. Man zeige: Es gibt ein transitives Modell M von ZFC, so dass für jeden P-generischen Filter G über M, $M[G] \not\models \diamondsuit$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass $\diamondsuit$ die folgende Aussage impliziert: Es gibt eine Familie $\mathcal{F}$ von stationären Teilmengen von ω_1 der Mächtigkeit 2^{ω_1}, so dass je zwei verschiedene Elemente der Familie abzählbaren Schnitt haben.

Hinweis: Sei $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ eine $\diamondsuit$-Folge. Dann betrachten Sie $\mathcal{F} = \{S_X \mid X \subseteq \omega_1\}$ mit $S_X = \{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $\diamondsuit$ äquivalent zu der folgenden Aussage ist: Es gibt eine Folge $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1, \lim(\alpha)\rangle$, so dass für jedes α, $S_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$ und für jede $X \subseteq \omega_1 \times \omega_1$ die Menge $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha \times \alpha = S_\alpha\}$ stationär in ω_1 ist.

Hinweis: Verwenden Sie eine Bijektion $f\colon \omega_1 \to \omega_1 \times \omega_1$, um Teilmengen von $\omega_1 \times \omega_1$ durch Teilmengen von ω_1 zu kodieren, und zeigen Sie, dass $\{\alpha < \omega_1 \mid f''\alpha = \alpha \times \alpha\}$ ein club in ω_1 ist.

Abgabe am Montag, den 01.08.2011, in und vor der Vorlesung.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ss11mengenlehre.html