Abteilung für Mathematische Logik 18.05.2011
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Luca Motto Ros

Übungen zur Vorlesung Axiomatische Mengenlehre

SS 2011, Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Nehmen Sie ZFC an. Durch transfinite Rekursion über **On** wird die $\beth$-Operation (Beth-Operation) definiert:

- $\beth_0 = \omega$;
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$;
- $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ für Limes λ.

(a) Man zeige: für alle Ordinalzahlen $\alpha > \omega$, $|L_\alpha| = |V_\alpha|$ gdw $\alpha = \beth_\alpha$.

(b) Nehmen Sie zusätzlich $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ an. Zeigen Sie, dass für alle Ordinalzahlen $\alpha > \omega$, $L_\alpha = V_\alpha$ gdw $\alpha = \beth_\alpha$.

Aufgabe 2: Für alle unendliche Kardinalzahlen κ, sei

$$H(\kappa) = \{x \mid |\mathrm{th}(x)| < \kappa\}.$$

Wenn $\kappa > \omega$ regulär ist, $H(\kappa) \vDash \mathsf{ZFC} - \mathsf{P}$.

Man zeige: wenn $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ und κ ein unendliche Kardinalzahl ist, dann $L_\kappa = H(\kappa)$.

Aufgabe 3: Sei $\mathrm{Code}(x)$ wie im Beweis von Satz 5.28 definiert. Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \mathrm{Code}(x)$ Δ_1-definierbar ist.

Aufgabe 4: Sei $N \prec V_{\omega_2}$ ein abzählbares Modell mit $\omega_1 \in N$. Zeigen Sie, dass $\pi_N(\omega_1)$ eine Ordinalzahl ist und dass $\pi_N(\omega_1) < \omega_1$.

Abgabe am Montag, den 30.05.2011, in und vor der Vorlesung.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ss11mengenlehre.html