Abteilung für Mathematische Logik 02.06.2011
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Luca Motto Ros

Übungen zur Vorlesung Axiomatische Mengenlehre

SS 2011, Übungsblatt 6

In den folgenden Übungen, sei M ein abzählbares transitives Modell von ZFC*, und sei $P \in M$ eine Halbordnung.*

Aufgabe 1: Man zeige: Wenn P nicht splitting ist, dann gibt es einen Filter $G \in M$, so dass G jede dichte Teilmenge von P schneidet.

Aufgabe 2: Sei P splitting. Zeigen Sie, dass

$$|\{G \subseteq P \mid G \text{ ist } P\text{-generisch über } M\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Aufgabe 3: Eine Menge $G \subseteq P$ heißt *schwacher Filter*, falls gilt:

(a) $G \neq \emptyset$.
(b) $(\forall p \in P)(\forall q \in G)(q \leq p \rightarrow p \in G)$.
(c) $(\forall p, q \in G)(\exists r \in P)(r \leq p \wedge r \leq q)$.

Ein schwacher Filter G heißt *P-generisch über M* wenn G jedes $D \in M$, das eine dichte Teilmenge von P ist, schneidet.

Man zeige: Wenn G ein P-generischer schwacher Filter über M ist, dann ist G ein (P-generischer Filter über M).

Aufgabe 4: Eine Menge $A \subseteq P$ heißt *Antikette*, wenn je zwei Elemente von A unverträglich sind. Eine Antikette heißt *maximal*, wenn jede echte Erweiterung von A um weitere Elemente von P keine Antikette mehr ist.

Sei G ein Filter. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $G \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in M$, das eine dichte Teilmenge von P ist;
(b) $G \cap A \neq \emptyset$ für jedes $A \in M$, das eine maximale Antikette von P ist;

(c) $G \cap E \neq \emptyset$ für jedes $E \in M$, das die folgende Eigenschaft hat: $(\forall p \in P)(\exists q \in E)(p \not\leq q)$. (Letzteres nennt man „E ist prädicht in P”.)

Abgabe am Montag, den 20.06.2011, in und vor der Vorlesung.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ss11mengenlehre.html