Abteilung für Mathematische Logik 08.06.2011
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Luca Motto Ros

Übungen zur Vorlesung Axiomatische Mengenlehre

SS 2011, Übungsblatt 7

In den folgenden Übungen seien M ein abzählbares transitives Modell von ZFC *(genauer: von einem genügend umfassenden Fragment von* ZFC*) und sei $P \in M$ eine Halbordnung.*

Aufgabe 1: Seien $\sigma, \tau \in M^P$ und $G \subseteq P$ ein Filter. Zeigen Sie, dass $\sigma_G \cup \tau_G = (\sigma \cup \tau)_G$.

Aufgabe 2: Seien $\tau \in M^P$, $G \subseteq P$ ein Filter, und sei

$$\pi = \{\langle \rho, s \rangle \mid (\exists \langle \sigma, r \rangle \in \tau)(\exists q \in P)(\langle \rho, q \rangle \in \sigma \wedge s \leq q \wedge s \leq r)\}.$$

Zeigen Sie, dass $\pi_G = \bigcup \tau_G$.

Aufgabe 3: Nehmen Sie an, dass P kein größtes Element enthält. Man zeige: Für jedes $x \in M$ gibt es einen P-Namen $\check{\check{x}}$ so dass $\check{\check{x}}_G = x$ für alle Filter $G \subseteq P$.

Aufgabe 4: Seien $A \in M$, G ein P-generischer Filter über M, und sei $f \colon A \to M$ eine Funktion mit $f \in M[G]$. Zeigen Sie, dass es ein $B \in M$ gibt mit $f \colon A \to B$.

Hinweis: Sei τ ein P-Name für f (d.h. $f = \tau_G$). Zeigen Sie, dass f auch einen Namen τ' hat, so dass jedes Element von τ' die Form $\langle \mathrm{op}(\check{a}, \check{b}), q \rangle$ hat für ein $a \in A$, $b \in M$ und $q \in P$. Sei $p \in P$ so dass $p \Vdash$ „f ist eine Funktion". Nach dem Reflexionssatz 5.15 (in M) gibt es ein $\alpha \in \mathbf{On}$, so dass $(\forall a \in A)(\forall q \leq p)(\exists b \in (V_\alpha)^M)(q \Vdash \langle \mathrm{op}(\check{a}, \check{b}) \in \tau')$.

Abgabe am Montag, den 27.06.2011, in und vor der Vorlesung.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ss11mengenlehre.html