Abteilung für Mathematische Logik 29.06.2011
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Luca Motto Ros

Übungen zur Vorlesung Axiomatische Mengenlehre

SS 2011, Übungsblatt 9

In den folgenden Übungen seien M ein abzählbares transitives Modell von ZFC *und $P, Q, R \in M$ Forcing-Halbordnungen .*

Aufgabe 1: Man zeige: Die Zusammensetzung zweier vollständiger Einbettungen ist eine vollständige Einbettung, d.h. wenn $i\colon P \to_c Q$ und $j\colon Q \to_c R$, dann $j \circ i\colon P \to_c R$.

Aufgabe 2: Sei $i\colon P \to_c Q$. Zeigen Sie: Wenn P splitting ist, dann ist auch Q splitting. Zeigen Sie auch folgendes: Wenn i eine dichte Einbettung ist (d.h. $i\colon P \to_d Q$), dann ist P splitting, gdw Q splitting ist.

Aufgabe 3: Sei κ eine Kardinalzahl. P hat die *κ-c.c.* (κ-chain condition) oder ist *κ-c.c.*, gdw alle ihre Antiketten Mächtigkeit $< \kappa$ haben (daher ist c.c.c. äquivalent zu ω_1-c.c.). P ist *κ-abgeschlossen*, gdw für alle $\lambda < \kappa$ und $\langle p_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ mit $\xi < \eta \Rightarrow p_\xi \geq p_\eta$, es ein $p \in P$ mit $\forall \xi < \lambda\, (p \leq p_\xi)$ gibt. Man zeige:

(a) Wenn P keine unendliche Antikette hat (d.h. P die ω-c.c. hat), dann $G \in M$ für alle P-generischen Filter G über M.

(b) Wenn P κ-c.c. und κ-abgeschlossen ist, dann $G \in M$ für alle P-generischen Filter G über M.

Hinweis: Ein $p \in P$ heißt *splitting*, gdw es $r, q \leq p$ mit $r \perp q$ gibt (daher ist P splitting gdw alle $p \in P$ splitting sind). Zeigen Sie, dass

$$D = \{p \in P \mid p \text{ ist nicht splitting}\}$$

dicht ist. Dann zeigen Sie: Wenn es ein nicht splitting $p \in G$ gibt, dann ist G in M.

Aufgabe 4: Zeigen Sie: Wenn P eine Antikette A_n mit $|A_n| \geq n$ hat für alle $n \in \omega$, dann hat P eine unendliche Antikette.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass P keine unendliche Antikette hat. Dann ist

$$D = \{p \in P \mid p \text{ ist nicht splitting}\}$$

dicht nach Aufgabe 3. Sei A eine maximale Antikette von nicht splitting Bedingungen: Dann gilt $|A| \geq \omega$.

Ähnlich zeige man: Wenn κ eine Limes Kardinalzahl ist und P κ-abgeschlossen ist, dann gilt: P hat eine Antikette der Mächtigkeit κ, gdw P eine Antikette A_λ mit $|A_\lambda| \geq \lambda$ hat für alle $\lambda < \kappa$.

Abgabe am Montag, den 18.07.2011, in und vor der Vorlesung.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ss11mengenlehre.html