

# Axiomatische Mengenlehre

Heike Mildenberger

14.3.2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Axiome von ZFC</b>	<b>1</b>
1.1	Relationen, Funktionen, lineare Ordnungen . . . . .	6
1.2	Wohlordnungen . . . . .	7
1.3	Transfinite Induktion und Rekursion . . . . .	9
1.4	Das Lemma von Zorn, Versionen des Auswahlaxioms . . . . .	10
1.5	Fundierung, die von Neumann-Hierarchie . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Ordinalzahlarithmetik und die Peano-Axiome</b>	<b>13</b>
2.1	Addition und Multiplikation auf den Ordinalzahlen . . . . .	16
2.2	Die ordinale Exponentiation . . . . .	18
2.3	Die Peano-Arithmetik . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Kardinalzahlen</b>	<b>21</b>
3.1	Die kardinalen Operationen $\oplus$ und $\otimes$ . . . . .	23
3.2	Kardinale Exponentiation . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Clubs, Fodor, Solovay, Silver</b>	<b>31</b>
4.1	Das Lemma von Fodor . . . . .	32
4.2	Disjunkte stationäre Mengen . . . . .	33
4.3	Der Satz von Silver . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Das Universum <math>\mathbf{L}</math> der konstruktiblen Mengen</b>	<b>37</b>
5.1	Definierbarkeit . . . . .	37
5.2	Die Lévy-Hierarchie . . . . .	38
5.3	Präzisierung der Operation $\text{Def}(x, y)$ und Absolutheit . . . . .	41
5.4	Das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese in $\mathbf{L}$ . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Abzählbare transitive Modelle</b>	<b>51</b>
6.1	Fundierte Relationen . . . . .	51
6.2	Die Mostowski-Operation . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Forcing</b>	<b>57</b>
7.1	Abzählbare transitive Modelle in Konsistenzbeweisen . . . . .	57
7.2	Halbordnungen, Filter und dichte Mengen . . . . .	58
7.3	Namen und Auswertungen . . . . .	61
7.4	Die Forcingrelation . . . . .	64
7.5	ZFC* in $M[G]$ . . . . .	69

<b>8 Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese</b>	<b>73</b>
8.1 $\neg$ CH . . . . .	73
8.2 Die relative Konsistenz von CH . . . . .	77
<b>9 Die relative Konsistenz von <math>\neg</math>AC</b>	<b>79</b>
<b>10 Vollst. Einbettungen, etc.</b>	<b>83</b>
10.1 Subhalbordnungen und Einbettungen . . . . .	83
10.2 Boolesche Werte . . . . .	86
10.3 Das Maximalitätsprinzip . . . . .	87
<b>11 Die relative Konsistenz von <math>\diamond</math>, der Lévy-Kollaps</b>	<b>89</b>
11.1 Karo . . . . .	89
11.2 Der Lévy-Kollaps . . . . .	91
<b>12 Iteriertes Forcing</b>	<b>93</b>
<b>13 Entstehung</b>	<b>99</b>
<b>Index</b>	<b>103</b>

# Kapitel 1

## Die Axiome von ZFC

Literatur: Bücher: [21] [23], [9], [8], [15], [17].

Skripte: [31], [35, 36], Originalartikel: [1, 2, 3, 5, 4, 7, 10, 12, 11, 19, 20, 22, 24, 27, 30, 33, 34, 37]

ZFC steht als Abkürzung für das Axiomensystem von Zermelo, Fraenkel zusammen mit dem Auswahlaxiom (Choice).

Duden: Axiom: als absolut richtig anerkannter Grundsatz, gültige Wahrheit, die keines Beweises bedarf.

Zur Formulierung der Axiome brauchen wir die Sprache der ersten Stufe  $\mathcal{L}(\tau)$  mit  $\tau = \{\in\}$ , einem zweistelligen Symbol  $\in$ , das für die „ist ein Element von“-Relation steht.

### Wiederholung: $\mathcal{L}(\tau)$

Die Sprache der ersten Stufe mit dem zweistelligen Prädikatssymbol  $\in$ ,  $\mathcal{L}(\in)$  wird in den folgenden Symbolen geschrieben: den Konjunktoren:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\neg$ ; den Quantoren:  $\exists$ ,  $\forall$ ; den Klammern:  $(, )$ , dem einzigen sogenannten nichtlogischen Symbol  $=$ , dem Gleichheitszeichen  $=$ , den Variablen:  $v_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Atomare Formeln sind:  $v_i = v_j$ ,  $v_i \in v_j$ .

Die Menge der Formeln,  $\mathcal{L}(\tau)$ , auch die Sprache genannt, ist die kleinste Menge, die die atomare Formel enthält und für die folgende Abschlusseigenschaften zutreffen: Wenn  $\varphi$  und  $\psi$  Formeln sind, dann auch  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ , usf.,  $\neg\varphi$ ,  $\exists v_i \varphi$ ,  $\forall v_i \varphi$ .

Zur Definition von  $\text{fr}(\varphi)$ , der Menge der freien Variablen in  $\varphi$ :  $\text{fr}(v_i = / \in v_j) = \{v_i, v_j\}$ ,  $\text{fr}((\varphi * \psi)) = \text{fr}(\varphi) \cup \text{fr}(\psi)$  für jeden Boole'schen Operator  $*$ ,  $\text{fr}(\exists v_i \varphi) = \text{fr}(\varphi) \setminus \{v_i\}$ .

Konvention: Wir schreiben statt  $\forall x(x \in y \rightarrow \varphi)$  kurz  $\forall x \in y \varphi$  und statt  $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$  nur  $\exists x \in y \varphi$ .

Wir schreiben  $\exists! x \varphi$  als Abkürzung für „es gibt genau ein  $x$  so dass  $\varphi$ “,  $\exists x \varphi \wedge \forall y(\varphi(\frac{y}{x}) \rightarrow y = x)$

**Definition 1.1.** Das Axiomensystem ZFC hat acht Axiome und zwei Schemata:

**Axiom 0:** Existenz (Ex). Es gibt eine Menge.

$$\exists x(x = x).$$

**Axiom 1:** Extensionalität (Ext). Mengen, die dieselben Elemente enthalten, sind gleich.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow y = x).$$

**Axiom 2:** Fundierung (Fund). Die  $\in$ -Relation ist fundiert, d.h., jede nicht leere Menge hat ein  $\in$ -minimales Element,

$$\forall x (\exists y \in x \rightarrow \exists y \in x (\neg \exists z (z \in y \wedge z \in x)))$$

**Axiom 3:** Aussonderungsschema (Comprehension) (Aus). Für alle  $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$  mit  $\text{fr}(\varphi) \subseteq \{x, z, w_1, w_2, \dots, w_n\}$  gilt folgendes

$$\forall z \forall w_1 \dots \forall w_n \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi).$$

**Axiom 4:** Paarmengenaxiom (Pairing) (Paar)

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

$\{x\}$  steht von nun an (als definierte Abkürzung) für die Einermenge von  $x$ . Überlegen Sie sich, dass die Existenz von Einermengen aus Paar folgt.

**Axiom 5:** Vereinigungsmengenaxiom (Union) (Ver)

$$\forall F \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A).$$

Wir schreiben von nun an  $\bigcup F = \{x \mid \exists Y (Y \in F \wedge x \in y)\}$ .

**Axiom 6:** Ersetzungsschema (Replacement) (Ers). Für alle  $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$  mit  $\text{fr}(\varphi) \subseteq \{x, y, A, w_1, w_2, \dots, w_n\}$  gilt folgendes:

$$\forall A \forall w_1 \dots \forall w_n (\forall x \in A \exists! y \varphi \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi).$$

**Axiom 7:** Unendlichkeitsaxiom (Infinity) (Inf)

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x)).$$

**Axiom 8:** Potenzmengenaxiom (Pot) powerset

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

Sei  $x \subseteq y$  eine Abkürzung für  $\forall z \in x (z \in y)$ . Wir schreiben  $\mathcal{P}(x)$  für  $\{y \mid y \subseteq x\}$ .

**Axiom 9:** Auswahlaxiom (Axiom of Choice) (AC)

$$(\forall A) ((\forall x \in A) (\exists y) (y \in x) \rightarrow (\exists f: A \rightarrow \bigcup A) (\forall x \in A) (f(x) \in x)).$$

Die Axiome sind nicht unabhängig. Zum Beispiel folgt Ex aus Inf. Manchmal wird statt der Existenz auch die Existenz der leeren Menge gefordert. Diese Forderung ist nicht stärker: Sei  $x$  eine Menge. Nach (Aus) gibt es  $\emptyset = \{z \in x \mid z \neq z\}$ .

## Teilsysteme

Etliche Folgerungen können schon aus Teilsystemen von ZFC bewiesen werden. Wichtige modelltheoretische Techniken werden für Teilsysteme von ZFC angewandt. Daher kennzeichnen wir:

- ZFC: Axiome 0 – 9
- ZF: Axiome 0 – 8
- ZF<sup>-</sup>: Axiome 0,1,3 – 8. Also ohne Fundierung.
- ZF<sup>-</sup> – P: Axiome 0,1,3 – 7. Ohne Fundierung und ohne Potenzmenge.
- ZF – P: Axiome 0– 7. Mit Fundierung ohne Potenzmenge.
- Und ZFC<sup>-</sup>, ZFC – P, ZF<sup>-</sup> – P sind natürlich entsprechend definiert.

ÜBUNG: Welche der genannten Teilsysteme haben mengengroße Modelle? Beschreiben Sie einige dieser Modelle. Finden Sie ein Modell von ZFC?

## Bemerkungen

Das Existenzaxiom wird manchmal auch aus der (klassischen) Logik (der Sprache der ersten Stufe) hergeleitet:  $x = x$  ist allgemeingültig, und daraus wird  $\exists x x = x$  abgeleitet. Leere Strukturen sind also niemals Gegenstand der Betrachtungen.

Das Extensionalitätsaxiom sagt, dass die Reihenfolge der Elemente in einer Menge und das eventuelle mehrfache Aufführen desselben Elements keine Rolle spielen. Statt der Implikation kann auch die Äquivalenz geschrieben werden, da die Rückrichtung aus den Schlussregeln der Logik erster Stufe über die Gleichheit folgt.

**Definition 1.2.** Eine Zusammenfassung von Mengen heißt Klasse. Eine Klasse, die keine Menge ist, heißt echte Klasse. Eine unechte Klasse ist eine Menge.

Alle unsere Variablen laufen über Mengen. Wir gestatten in ZFC keine Variablennamen, die über Klassen rangieren. Alle Klassen werden definierbare Klassen des Typs  $\{x \mid \varphi\}$  mit (Mengen-)Parametern in  $\varphi$  sein. Später werden wir jedoch auch einige Klassen schreiben, und dies soll als Abkürzung für Definitionen aufgefasst werden. Eine andere Möglichkeit ist das Axiomensystem NBG, das durch von Neumann, Bernays und Gödel aufgestellt wurde und das wie ZFC aussieht, nur dass die definierbaren Klassen  $\varphi$  in den Schemata von Ers und Aus durch Klassenvariablen ersetzt werden. NBG ist eine konservative Erweiterung von ZFC: Aus NBG lassen sich die gleichen Folgerungen über Mengen ziehen wie aus ZFC. Im Abschnitt über transfiniten Induktion und transfiniten Rekursion werden die gerade eben gemachten kryptischen Bemerkungen näher erläutert. Bei den Klassen weichen ZFC und NBG voneinander ab: ZFC hat keine Variablen für Klassen, und spricht in den Schemata nur über definierbare Klassen. Wir schreiben in der Regel große fette Buchstaben für Klassen.

## Die Russell'sche Antinomie

Das Frege'sche Komprehensionsschema (das nicht zu ZFC gehört) sagt: Zu jedem  $\varphi$  mit  $y \notin \text{fr}(\varphi)$ :

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi)$$

Dieses Schema, angewandt auf die Formel  $\varphi(x) = x \neq x$ , führt zu einem Widerspruch, der Russell'schen Antinomie: Sei  $y$ , so dass  $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$ . Dann ist  $y \in y$  gwd  $y \notin y$ . Widerspruch.

Das Aussonderungsaxiom gestattet die Bildung der Russell'schen Klasse nicht. Man betrachte die Aussage  $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \notin x)$ , für eine Menge  $z$ . Dann ist  $y \notin y$  nach der Fundiertheit, und  $y = z \notin z$ , und es gibt also keinen Widerspruch.

Dass es diesen einen Widerspruch in ZFC nicht gibt, garantiert natürlich nicht, dass es nicht einen anderen Widerspruch gibt. Leider kann die Widerspruchsfreiheit von ZFC nicht garantiert werden, schlimmer noch, nach dem zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz kann die Widerspruchsfreiheit von ZFC mit den Mitteln von ZFC nicht gezeigt werden.

**Satz 1.3.** *Es gibt keine Menge, die alle Mengen enthält  $\neg \exists x \forall z (z \in x)$ .*

Beweis. Sonst sei  $\forall z (z \in x)$  Dann ist  $\{z \in x \mid z \notin z\} = u$  eine Menge und es gibt wieder den Russell'schen Widerspruch  $u \in u \leftrightarrow u \notin u$ .  $\square$

Wir schreiben  $\mathbf{V} = \{x \mid x \text{ Menge}\}$  für die Allklasse, die auch das Mengenuiversum genannt wird. Wir schreiben fettgedruckte Buchstaben und andere Symbole (wie  $<$ ,  $\subseteq$ , usf) für Klassen und quantifizieren nur in der Metasprache über Klassen.

Wenn man nur die Axiome Ex, Aus, Fund und Ers hat, dann wäre  $\mathbf{V} = \{\emptyset\}$  mit der leeren  $\in$ -Relation ein Modell, ein recht langweiliges. Es ist also sinnvoll, mehr Mengenexistenzaxiome dazuzunehmen.

## Paarmengen, Vereinigungsmengen, Bildmengen

Wir haben die Axiome 4,5,6, scheinbar schwach formuliert: Die geforderten Mengen  $(z, A, Y)$  könnten mehr Elemente enthalten, als in den Axiomen explizit gefordert war. Doch mithilfe des Aussonderungsaxioms folgt aus 4,5,6 die Existenz von Mengen, die genau die geforderten Elemente enthalten. Dies zeigt man so:

Paarmenge: Seien  $x, y$  gegeben und sei  $z$  wie in Axiom 4. Dann ist  $z' = \{u \in z \mid u = x \vee u = y\} = \{x, y\}$ .

Vereinigungsmenge: Sei  $\mathcal{F}$  gegeben. Sei  $A$  wie in Axiom 5 zu  $\mathcal{F}$ . Dann ist  $A' = \{x \in A \mid \exists Y \in \mathcal{F} x \in Y\} = \bigcup \mathcal{F}$ .

Bildmenge: Gelte  $\forall x \in A \exists! y \varphi$ . Sei  $Y$  wie im Ersetzungsschema gegeben. Dann ist  $Y' = \{y \in Y \mid \exists x \in A \varphi\} = \text{rge}(\varphi \upharpoonright A)$  die Bildmenge der Operation  $\varphi$  angewandt auf die Menge  $A$ .

## Geordnete Paare

Nach dem Paarmengenaxiom ist zu jeder Menge  $x$  auch die Einermenge  $\{x\} = \{x, x\}$  eine Menge.

**Definition 1.4.** Die Menge  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$  heißt das geordnete Paar von  $x$  und  $y$ .

Hat das so definierte geordnete Paar die Eigenschaft, die wir von einem geordneten Paar erwarten?

**Behauptung 1.5.**

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' (\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \leftrightarrow (x = x' \wedge y = y'))$$

Beweis. Wir rechnen  $\rightarrow$  mithilfe des Extensionalitätsaxioms und Logik nach.

1. Fall  $x = y$ . Dann ist  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ . Also ist nach Ext  $\{x\} = \{x'\}$  und  $\{x\} = \{x', y'\}$ . Aus dem ersten folgt  $x = x'$  und aus dem zweiten  $x' = y'$ . Also sind  $x = y = x' = y'$  und insbesondere  $x = x'$  und  $y = y'$ .

2. Fall  $x \neq y$ . Dann ist  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ . Dann ist  $\{x, y\} = \{x', y'\}$  und  $x' \neq y'$  und  $\{x'\} = \{x\}$ . Daher ist  $x = x'$  und  $y = y'$ .  $\square$

## Große und kleine Schnitte, kleine Vereinigungen

Wir weisen die Wohldefiniertheit der genannten Operationen auf der Basis der Axiome Aus, Paar, Ver nach.

Kleiner Schnitt:  $x \cap y = \{u \in x \mid u \in y\}$  braucht nur das Aussonderungsschema.

Kleine Vereinigung:  $x \cup y = \bigcup \{x, y\} = \{z \in \bigcup \{x, y\} \mid z \in x \vee z \in y\}$  benutzt das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsmengenaxiom.

Große Schnitte: Sei  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Sei  $Y \in \mathcal{F}$ . Dann ist  $\bigcap \mathcal{F} = \{y \in Y \mid \forall Z \in \mathcal{F} y \in Z\}$  also nach dem Aussonderungsschema wohldefiniert. Für  $\mathcal{F} = \emptyset$  hingegen ist  $\bigcap \mathcal{F} = \mathbf{V}$  die Allklasse, oder undefiniert, auf jeden Fall keine Menge.

Differenz:  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$  existiert nach dem Aussonderungsschema.

## Produkte endlich vieler Faktoren

Warnung: Produkte aus unendlich vielen Faktoren können nur mit dem Auswahlaxiom adäquat behandelt werden. Wir beschränken uns auf zwei Faktoren.

**Behauptung 1.6.**  $A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$  ist eine Menge.

Beweis: Sei  $y \in B$ . Wir halten  $y$  zunächst fest. Es gilt  $\forall x \in A \exists! z (z = \langle x, y \rangle)$ . Aus Ers und Aus folgt, dass

$$\text{prod}(A, y) = \{z \mid \exists x \in A z = \langle x, y \rangle\}$$

eine Menge ist. Außerdem gilt  $\forall y \in B \exists! z (z = \text{prod}(A, y))$ . Nun werden Aus und Ers auf diese Formel angewandt und liefern die Menge

$$\text{prod}'(A, B) = \{\text{prod}(A, y) \mid y \in B\}.$$

Nun verifiziert man, dass  $A \times B = \bigcup \text{prod}'(A, B)$ .

Eine andere Beweismethode ist es,  $A \times B$  aus  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ , der Potenzmenge der Potenzmenge von  $A \cup B$ , auszusondern. Der erste, längere Beweis ist jedoch nicht umsonst, da es sehr viele nützliche Teilbereiche des Mengenuniversums gibt, in denen das Potenzmengenaxiom nicht gilt, das Ersetzungsschema für recht einfache  $\varphi$ 's (zu denen die beiden im obigen Beweis verwendeten  $\varphi$ 's gehören) jedoch gilt. □

## 1.1 Relationen, Funktionen, lineare Ordnungen

Wir möchten die genannten Objekte auf der Basis der Axiome 0 bis 6 begründen.

**Definition 1.7.** 1. Eine Relation ist eine Menge, deren Elemente geordnete Paare sind.

2. Der Definitionsbereich (domain) von  $R$  ist  $\text{dom}(R) = \{x \in \bigcup \bigcup R \mid \exists y \langle x, y \rangle \in R\}$ .
3. Der Bildbereich (range) von  $R$  ist  $\text{rge}(R) = \{y \in \bigcup \bigcup R \mid \exists x \langle x, y \rangle \in R\}$ .
4. Die Umkehrrelation von  $R$  ist  $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$ .

Bemerkung: Der Definitionsbereich und der Bildbereich können für jede Menge  $R$  gelesen werden, aber sind nur für Relationen  $R$  gebräuchlich.

**Definition 1.8.** Eine Menge  $f$  ist eine Funktion gdw  $f$  eine Relation ist und folgendes gilt

$$\forall x \in \text{dom}(f) \exists! y (\langle x, y \rangle \in f).$$

**Definition 1.9.** 1. Wir schreiben  $f: A \rightarrow B$ , wenn folgendes gilt:  $f$  ist eine Funktion,  $\text{dom}(f) = A$ ,  $\text{rge}(f) = B$ .

2. Wir bezeichnen das  $y$  mit  $\langle x, y \rangle \in f$  als  $f(x)$ .
3. Für  $C \subseteq \text{dom}(f)$  schreiben wir  $f \upharpoonright C = f \cap (C \times B)$ .
4. Wir schreiben Bildmengen wie folgt:  $f''C = f[C] = \text{rge}(f \upharpoonright C) = \{f(x) \mid x \in C\}$ . Falls  $\text{dom}(f) \supseteq C \cup \{C\}$ , kann  $f(C) \neq f''(C)$  sein.
5.  $f: A \rightarrow B$  ist injektiv, wenn es zu jedem  $y \in B$  höchstens ein  $x \in A$  gibt, so dass  $f(x) = y$ .
6.  $f: A \rightarrow B$  ist surjektiv, wenn es zu jedem  $y \in B$  mindestens ein  $x \in A$  gibt, so dass  $f(x) = y$ .
7.  $f: A \rightarrow B$  ist bijektiv, wenn es zu jedem  $y \in B$  genau ein  $x \in A$  gibt, so dass  $f(x) = y$ .

Bei (zweistelligen) Relationen  $R$  schreibt man oft  $xRy$  für  $\langle x, y \rangle \in R$ .

**Definition 1.10.** Eine lineare (auch: totale) Ordnung ist ein Paar  $\langle A, R \rangle$ , so dass  $R$  die Menge  $A \neq \emptyset$  linear ordnet, d.h., dass  $R$  eine Relation ist, die die folgenden Eigenschaften hat

Transitivität:  $\forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

Irreflexivität:  $\forall x \in A \neg xRx$ .

Trichotomie (auch Linearität, Konnexität, Totalität)  $\forall x, y \in A (xRy \vee yRx \vee x = y)$ .

Irreflexive, transitive Relationen heißen partielle Ordnungen oder Halbordnungen. Das Wort „Ordnung“ wird je nach Autor und Zeit für lineare Ordnung oder für Halbordnung gebraucht.

Beachten Sie, dass wir nicht gefordert haben, dass  $R \subseteq A \times A$ . Daher gilt: Wenn  $\langle A, R \rangle$  eine lineare Ordnung ist und  $B \subseteq A$ , dann ist  $\langle B, R \rangle$  eine lineare Ordnung. Man spart sich also „das Herunterschneiden“ der Relation.

Nun werden wir bestimmte Ordnungen bis auf Isomorphie klassifizieren.

**Definition 1.11.** Wir definieren den Isomorphiebegriff für Strukturen mit einer zweistelligen Relation:  $\langle A, R \rangle$  ist isomorph zu  $\langle B, S \rangle$ , in Symbolen  $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$ , gdw  $\exists f: A \rightarrow B$  ( $f$  bijektiv  $\wedge \forall x, y \in A (xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$ ).

## 1.2 Wohlordnungen

**Definition 1.12.**  $\langle A, R \rangle$  heißt Wohlordnung, gdw  $\langle A, R \rangle$  eine Ordnung ist, in der jede nicht leere Teilmenge von  $A$  ein  $R$ -minimales Element hat.  $\forall y ((y \subseteq A \wedge \exists x \in y) \rightarrow \exists z \in y (\forall u \in y (\neg uRz)))$

Man überlege sich, dass die hier geforderten  $R$ -minimalen Elemente auch die  $R$ -kleinsten sind, d.h., dass man  $(\neg uRz)$  durch  $(u = z \vee zRu)$  ersetzen kann.

Gegenbeispiele:  $(\mathbb{Q}, <)$ ,  $(\mathbb{Z}, <)$ ,  $(\mathbb{R}, <)$ .

Beispiele:  $(\mathbb{N}, <)$ ,  $(\{0, 1, 2\}, <)$ ,  $(\mathbb{N}_1, <)$ .

(Die letztgenannte Struktur wird später erläutert werden.)

Unser Ziel ist die Klassifikation aller Wohlordnungen bis auf Isomorphie. Man denke daran, dass in der Mathematik Klassifikationsaufgaben im Allgemeinen immense Unterfangen sind. Zum Glück wird dies bei den Wohlordnungen nicht der Fall sein.

Eine Isomorphieklasse ist eine Klasse isomorpher Strukturen. Jede Isomorphieklasse, außer die zur leeren Struktur (die meistens gar nicht als Struktur zugelassen wird), ist eine echte Klasse. Wenn man zwischen isomorphen Strukturen nicht unterscheiden möchte oder kann, tut man so, als ob sie identisch wären, und nennt das dann Arbeiten „bis auf Isomorphie“ oder „modulo Isomorphie“.

**Definition 1.13.** Sei  $\langle A, R \rangle$  eine Menge mit einer zweistelligen Relation, und sei  $x \in A$ . Die Vorgängermenge von  $x$  in  $\langle A, R \rangle$  ist  $\text{pred}(A, x, R) = \{y \in A \mid yRx\}$ .

Diese Festsetzung wird besonders für Ordnungen, lineare Ordnungen und Wohlordnungen  $\langle A, R \rangle$  gebraucht.

Wir erarbeiten nun (mit einem kleinen Exkurs über den Wohlordnungssatz) ein Repräsentantensystem für  $(\langle A, R \rangle / \cong) = \{\langle B, S \rangle \mid \langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle\}$  (dies ist eine Klasse),  $\langle A, R \rangle$  Wohlordnung. Wir werden sehen, dass es Klassen-viele Isomorphieklassen gibt.

**Lemma 1.14.** *Wenn  $\langle A, R \rangle$  eine Wohlordnung ist, dann ist für alle  $x \in A$*

$$\langle A, R \rangle \not\cong \langle \text{pred}(A, x, R), R \rangle.$$

Beweis: Angenommen,  $f: A \rightarrow \text{pred}(A, x, R)$  wäre ein Isomorphismus. Da  $x \in A \setminus \text{pred}(A, x, R)$ , ist  $f(x) \neq x$ . Die Menge  $\{y \mid f(y) \neq y\}$  ist also nicht leer und hat ein kleinstes Element  $z$ . Dann ist für alle  $z'Rz$ ,  $f(z') = z'$ . Wegen der Injektivität von  $f$  ist daher  $zRf(z)$ . Dann gilt aber wegen der Ordnungstreue auch für alle  $u$  mit  $zRu$ , dass  $f(z)Rf(u)$ . Also ist  $z \notin \text{rge}(f)$ , im Widerspruch zur Surjektivität von  $f$ .  $\square$

Frage: Wo bricht der Beweis dieses Lemmas z.B. für  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$  und  $x \in \mathbb{Q}$  zusammen?

**Lemma 1.15.** *Wenn  $\langle A, R \rangle$  und  $\langle B, S \rangle$  isomorphe Wohlordnungen sind, dann gibt es genau einen Isomorphismus von  $\langle A, R \rangle$  auf  $\langle B, S \rangle$ .*

Beweis: Seien  $f, g$  Isomorphismen von  $\langle A, R \rangle$  auf  $\langle B, S \rangle$ . Sei  $z = \min\{u \in A \mid f(u) \neq g(u)\}$ , o.b.d.A. sei  $f(z)Sg(z)$ . Dann zeigt man wie im vorigen Lemma, dass  $f(z) \notin \text{rge}(g)$ .  $\square$

**Satz 1.16.** *(Der Trichotomiesatz für Wohlordnungen). Seien  $\langle A, R \rangle$  und  $\langle B, S \rangle$  Wohlordnungen. Dann gilt*

- (a)  $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$  oder
- (b)  $(\exists x \in A) \langle \text{pred}(A, x, R), R \rangle \cong \langle B, S \rangle$  oder
- (c)  $(\exists y \in B) \langle A, R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, y, S), S \rangle$ .

Beweis: Wir setzen

$$f = \{\langle u, v \rangle \in A \times B \mid \langle \text{pred}(A, u, R), R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, v, S), S \rangle\}.$$

1. Zu jedem  $u \in \text{dom}(f)$  gibt es genau ein  $v$  mit  $\langle u, v \rangle \in f$ . Sonst: Sei  $vSv'$ ,  $g: \langle \text{pred}(A, u, R), R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, v, S), S \rangle$ ,  $g': \langle \text{pred}(A, u, R), R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, v', S), S \rangle$ . Dann ist  $g' \circ g^{-1} \langle \text{pred}(B, v, S), S \rangle \cong \langle \text{pred}(B, v', S), S \rangle$ , im Widerspruch zu Lemma 1.14.

2.  $\forall u \in \text{dom}(f) \forall u' Ru (u' \in \text{dom}(f))$ , da man die Einschränkung des Zeugen  $g: \langle \text{pred}(A, u, R), R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, v, S), S \rangle$  auf  $\text{pred}(A, u', R)$  nehmen kann.

3.  $\forall v \in \text{rge}(f) \forall v' Sv (v' \in \text{rge}(f))$ , da man die Einschränkung des Zeugen  $g: \langle \text{pred}(A, u, R), R \rangle \cong \langle \text{pred}(B, v, S), S \rangle$  auf  $(g^{-1})'' \text{pred}(B, v', S)$  nehmen kann.

4. Echte Teilmengen  $u$  von Wohlordnungen  $\langle C, T \rangle$ , die gegenüber Vorgängern abgeschlossen sind, sind von der Form  $\text{pred}(C, x, T)$  für  $x = \min C \setminus u$ , wobei das Minimum bezüglich  $T$  gebildet wird.

Nun gibt es also für  $\text{dom}(f)$  und für  $\text{rge}(f)$  jeweils zwei Möglichkeiten, und wir gelangen zur folgenden Fallunterscheidung:

1. Fall:  $\text{dom}(f) = A$ ,  $\text{rge}(f) = B$ . Dann rechnet man leicht nach, dass  $f$  ein Isomorphismus von  $\langle A, R \rangle$  auf  $\langle B, S \rangle$  ist. Wir erhalten also Disjunktionsglied (a) des Satzes.

2. Fall:  $\text{dom}(f) = \text{pred}(A, x, R)$  für ein  $x \in A$ ,  $\text{rge}(f) = B$ . Dann rechnet man leicht nach, dass  $f$  ein Isomorphismus von  $\langle \text{pred}(A, x, R), R \rangle$  auf  $\langle B, S \rangle$  ist. Wir erhalten also Disjunktionsglied (b) des Satzes.

3. Fall:  $\text{dom}(f) = A$  und  $\text{rge}(f) = \text{pred}(B, y, S)$  für ein  $y \in B$ . Dann rechnet man leicht nach, dass  $f$  ein Isomorphismus von  $\langle A, R \rangle$  auf  $\langle \text{pred}(B, y, S), S \rangle$  ist. Wir erhalten also Disjunktionsglied (c) des Satzes.

4. Fall:  $\text{dom}(f) = \text{pred}(A, x, R)$  für ein  $x \in A$ ,  $\text{rge}(f) = \text{pred}(B, y, S)$  für ein  $y \in B$ . Dann ist aber  $\langle x, y \rangle \in f$ , wie durch  $f \cup \{\langle x, y \rangle\}$  bezeugt wird, im Gegensatz zu  $x \notin \text{dom}(f) = \text{pred}(A, x, R)$ . Widerspruch.  $\square$

Zur Motivation der Ordinalzahlen geben wir nun einen (vorläufig noch lückenhaften) Beweis des Wohlordnungssatzes. Eine Funktion wie in AC gefordert heißt Auswahlfunktion .

**Satz 1.17.** *Der Wohlordnungssatz, Zermelo 1904. Auf der Basis von ZF gilt:  $\text{AC} \leftrightarrow \forall A \exists R (\langle A, R \rangle \text{ Wohlordnung})$ .*

Beweis.  $\leftarrow$ . Sei  $\bigcup \mathcal{F}$  via  $R$  wohlgeordnet. Dann ist  $f(Y) = \min_R(Y)$  eine gewünschte Auswahlfunktion.

$\rightarrow$  (vorläufig noch nicht begründet) Sei  $A$  gegeben. Sei  $h: \mathcal{P}(A) \setminus \{0\} \rightarrow A$  eine Auswahlfunktion auf  $\mathcal{P}(A)$ . Nun definieren wir für  $\alpha \in \mathbf{On}$  durch transfinite Rekursion eine Funktion  $g_\alpha: (\alpha, \in) \rightarrow A \cup \{*\}$  mit einem  $* \notin A$  durch

$$g_\alpha(\beta) = \begin{cases} h(A \setminus g''_\alpha \beta), & \text{falls } g''_\alpha \beta \neq A; \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

$g_\alpha \upharpoonright (g_\alpha^{-1})'' A$  ist injektiv, und daher gibt es ein  $\alpha$  und ein  $\beta \leq \alpha$ , so dass  $g_\alpha'' \beta = A$ . Wir nehmen das kleinste  $\alpha$ . Nun setzen wir für  $a, b \in A$ ,  $aRb \leftrightarrow g_\alpha^{-1}(a) \in g_\alpha^{-1}(b)$ .  $\square$

### 1.3 Transfinite Induktion und Rekursion

**Definition 1.18.** Eine Klasse  $\mathbf{G}$  von Paaren heißt Operation auf  $\mathbf{D}$  gdw  $\forall x \in \mathbf{D} \exists ! y (\langle x, y \rangle \in \mathbf{G})$ . Wir schreiben  $\mathbf{G}: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{V}$ .

**Satz 1.19.** *Der Satz über die transfinite Induktion, hier in der Formulierung mit einer Klassenvariablen  $\mathbf{X}$ .*

*Sei  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{On}$  und sei  $0 \in \mathbf{X}$  und sei für alle  $\alpha \in \mathbf{X}$  auch  $S(\alpha) \in \mathbf{X}$  und sei für alle Limesordinalzahlen  $\lambda \subseteq X$  auch  $\lambda \in \mathbf{X}$ . Dann ist  $\mathbf{X} = \mathbf{On}$ .*

Beweis: Wir nehmen an, dass es ein  $\alpha \in \mathbf{On} \setminus \mathbf{X}$  gäbe. Dann gibt es ein minimales Element  $\beta$  in der Menge  $\alpha \cap (\mathbf{On} \setminus \mathbf{X})$ . Nach den Voraussetzungen über  $\mathbf{X}$  ist  $\beta \neq 0$ .  $\beta$  kann auch kein Nachfolger sein, da  $\mathbf{X}$  unter Nachfolgerbildung abgeschlossen ist. Und falls schließlich  $\beta$  eine Limesordinalzahl wäre, hätten wir  $\beta \subseteq \mathbf{X}$  und daher nach Voraussetzung  $\beta \in \mathbf{X}$ . Also ist  $\mathbf{X} = \mathbf{On}$ .  $\square$

Eine Definition, die transfinite induktiv weitergetragen wird, heißt transfinite Rekursion. Wir begründen, dass dies wohldefinierte Objekte (in der Regel

Klassen) gibt. Wieder arbeiten wir mit Klassenvariablen, die für Ausdrücke in der Sprache der ersten Stufe stehen, so dass  $\forall x \exists! y \varphi$  gilt für geeignetes  $\varphi$ , das die Definition der Operation  $F$  ist. Ein geeignetes anderes  $\psi$ , das im Beweis erst aufgebaut wird, wird die Definition der Operation  $\mathbf{G}$  sein.

**Satz 1.20.** *Der Satz über die transfiniten Rekursion. Für  $\mathbf{F}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $\mathbf{G}: \mathbf{On} \rightarrow \mathbf{V}$  so dass*

$$\forall \alpha (\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \upharpoonright \alpha)).$$

Beweis: Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit von  $\mathbf{G}$ . Seien  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  zwei Klassen, die den Rekursionsbedingungen genügen. Dann gilt  $\mathbf{G}_1(0) = \mathbf{F}(\emptyset) = \mathbf{G}_2(0)$ , und, wenn  $G_1 \upharpoonright \alpha = G_2 \upharpoonright \alpha$ , dann ist  $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_1 \upharpoonright \alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_2 \upharpoonright \alpha) = \mathbf{G}_2(\alpha)$ . Nach dem Satz über die transfiniten Induktion ist daher  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$ .

Nun zur Existenz:  $g \in \mathbf{V}$  heißt  $\delta$ -Approximation gdw  $\text{dom}(g) = \delta \in \mathbf{On}$  und  $\forall \alpha \in \delta (g(\alpha) = \mathbf{F}(g \upharpoonright \alpha))$ . Für je zwei Approximationen, sagen wir, für eine  $\delta$ -Approximation  $g$  und eine  $\delta'$ -Approximation  $g'$ , zeigt man durch Induktion über  $\alpha < \delta \cap \delta'$ , dass  $g \upharpoonright \delta \cap \delta' = g' \upharpoonright \delta \cap \delta'$ . Danach zeigt man durch transfiniten Induktion, dass  $\forall \delta (\exists \delta$ -Approximation  $g)$ . Zum Schluss definiert man  $\mathbf{G}(\alpha) = g(\alpha)$  für eine beliebige  $\delta$ -Approximation  $g$ , so dass  $\delta > \alpha$ .  $\square$

Nun zurück zum Wohlordnungssatz, Satz 1.17.

Beweis:  $\rightarrow$  Sei  $A$  gegeben. Sei  $h: \mathcal{P}(A) \setminus \{0\} \rightarrow A$  eine Auswahlfunktion auf  $\mathcal{P}(A)$ . Nun definieren wir durch transfiniten Rekursion eine Operation  $\mathbf{G}: \mathbf{On} \rightarrow A \cup \{A\}$  durch

$$\mathbf{G}(\alpha) = \begin{cases} h(A \setminus \mathbf{G}''\alpha), & \text{falls } \mathbf{G}''\alpha \neq A, \\ A, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathbf{G} \upharpoonright (\mathbf{G}^{-1})''A$  ist injektiv, wie man induktiv zeigt. Es gibt daher ein  $\beta$  so dass  $\mathbf{G}''\beta = A$ . Sonst wäre  $\mathbf{G}: \mathbf{On} \rightarrow A$  injektiv, und daher  $\mathbf{On} = (\mathbf{G}^{-1})''A$  nach dem Ersetzungsaxiom eine Menge, was dem Satz von Burali-Forti widerspricht.  $\beta$  ist eindeutig. Nun setzen wir für  $a, b \in A$ ,  $aRb \leftrightarrow \mathbf{G}^{-1}(a) \in \mathbf{G}^{-1}(b)$  und erhalten eine Wohlordnung  $R$  von  $A$ , so dass  $\text{otp}(A, R) = \beta$ .  $\square$

## 1.4 Das Lemma von Zorn, Versionen des Auswahlaxioms

Nun möchten wir noch eine weitere Anwendung des Satzes von der transfiniten Rekursion vorstellen: Auch das Lemma von Zorn ist auf der Basis von ZF zum Auswahlaxiom äquivalent.

**Definition 1.21.** Ein geordnetes Paar  $\langle P, < \rangle$  heißt Halbordnung oder partielle Ordnung (partial order), gdw  $<$  eine transitive, irreflexive Relation ist.

**Definition 1.22.** 1. Eine Halbordnung heißt fundiert, wenn jede nicht leere Teilmenge ein Minimum hat (dies ist im Allgemeinen nicht das kleinste Element und nicht eindeutig).

2. Eine Teilmenge  $K$  einer Halbordnung heißt Kette, gdw

$$\forall x, y \in K (x = y \vee x < y \vee y < x).$$

3. Eine Halbordnung heißt induktiv, wenn jede Kette eine obere Schranke hat.

**Satz 1.23.** 1. *Das Lemma von Zorn. (ZFC). Jede nicht leere induktive Halbordnung hat ein maximales Element.*

2. *Auf der Basis von ZF folgt aus dem Lemma von Zorn das Auswahlaxiom.*

Beweis: 1. Sei  $R$  eine Wohlordnung auf  $P$  und sei  $f : \alpha \cong \langle P, R \rangle$ . Wir definieren induktiv über  $\beta < \alpha$  eine Funktion  $G : \alpha \rightarrow \mathbf{V}$ . Wir setzen  $G(\beta) =$  die  $R$ -kleinste obere Schranke von  $\text{rge}(G \upharpoonright \text{pred}(P, f(\beta), R))$  die nicht in  $\text{rge}((G \upharpoonright \text{pred}(P, f(\beta), R)))$  ist, und wir setzen  $G(\beta) = \{P\}$ , falls es keine obere Schranke von  $\text{rge}(G \upharpoonright \text{pred}(P, f(\beta), R))$  gibt, die nicht in  $\text{rge}((G \upharpoonright \text{pred}(P, f(\beta), R)))$  ist.

Es widerspricht  $\text{lim}(\alpha)$ ,  $G : \alpha \rightarrow P$  bijektiv, immer mit dem ersten Fall in der Fallunterscheidung, der Induktivität von  $\langle P, < \rangle$ , denn dann wäre dies eine Kette ohne maximales Element.

Die Definition von  $G$  bricht also bei einer Nachfolgerzahl ab, weil  $P$  ausgeschöpft ist, oder es trifft bei einer Nachfolgerordinalzahl  $\beta$  zum ersten Mal die zweite Hälfte der Fallunterscheidung zu, denn bei Limesritten trifft immer die erste Möglichkeit zu, da  $\langle P, < \rangle$  induktiv ist und  $\text{rge}(G)$  und alle seine Teilmengen Ketten sind.

Sei  $\gamma$  der direkte  $\in$ -Vorgänger von  $\beta$ . Dann ist  $G(\gamma)$  ein maximales Element.

2. Sei  $A$  gegeben. Wir setzen  $P = \{\langle B, S \rangle \mid B \subseteq A, S \text{ Wohlordnung auf } B\}$ , und definieren  $\prec$  auf  $P$  durch

$$\langle B, S \rangle \prec \langle B', S' \rangle \leftrightarrow \exists c \in B' (\langle B, S \rangle \cong \langle \text{pred}(B', c), S' \rangle).$$

Man rechnet nach, dass  $\langle P, \prec \rangle$  eine induktive Halbordnung ist. Das Lemma von Zorn liefert nun ein maximales Element  $\langle B, S \rangle$  in  $\langle P, \prec \rangle$ . Falls  $B \neq A$ , kann man die Wohlordnung  $\langle B, S \rangle$  um einen größten Punkt verlängern, und hat daher einen Widerspruch zur Maximalität. Daher ist  $B = A$ .  $\square$

Es gibt zahlreiche Verwandte des Auswahlaxioms, und es gibt Bücher, die sich alleine dem Auswahlaxiom widmen: [25] gibt äquivalente Versionen an, und [14] behandelt auch echt schwächere Versionen. Wir stellen noch eine Äquivalenz ohne Beweis vor:

**Satz 1.24.** 1. *ZFC. Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

2. *(Blass, 1984 [1]) Auf der Basis von ZF: Wenn jeder Vektorraum eine Basis hat, dann gilt das Auswahlaxiom.*

## 1.5 Fundierung, die von Neumann-Hierarchie

**Definition 1.25.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Wir definieren induktiv über  $\alpha \in \mathbf{On}$ :

- (a)  $V_0 = \emptyset$ ,
- (b)  $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ ,
- (c)  $V_\delta = \bigcup_{\beta < \delta} V_\beta$  für  $\text{lim}(\beta)$ ,
- (d)  $\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$ .

Die klassen-lange Folge  $\langle V_\alpha \mid \alpha < \in \mathbf{On} \rangle$  heißt die *von Neumann-Hierarchie*.

**Definition 1.26.**  $R$  heißt *fundiert* (auf  $A$ ) gdw

$$(\forall x \subseteq A)(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x \neg z R y).$$

$y$  heißt ein  $R$ -minimales Element von  $x$ .

**Lemma 1.27.**  $\text{ZF}^-$ .  $A \in \mathbf{WF} \rightarrow \langle A, \in \rangle$  fundiert.

**Definition 1.28.** Eine Menge  $x$  heißt transitiv gdw  $\forall y \in x \forall z \in y z \in x$ .

**Lemma 1.29.**  $\text{ZF}^-$ . Sei  $A$  transitiv. Dann gilt: Wenn  $\langle A, \in \rangle$  fundiert ist, dann  $A \in \mathbf{WF}$ .

**Definition 1.30.** Die transitive Hülle einer Menge  $x$  (auch transitiver Abschluss, transitive closure genannt),  $\text{th}(x)$ :  $\bigcup^{(0)} x = x$ ,  $\bigcup^{(n+1)} x = \bigcup \bigcup^{(n)} x$ ,  $\text{th}(x) = \bigcup \{ \bigcup^{(n)} x \mid n \in \omega \} = x \cup \bigcup x \cup \bigcup^{(2)} x \cup \dots$

**Definition 1.31.** Eine Menge  $x$  hat erblich die Eigenschaft  $y$ , wenn  $\text{th}(x)$  die Eigenschaft hat.

Beispiele sind: Erblich endlich, erblich abzählbar, erblich  $\leq \kappa$ .

**Satz 1.32.**  $\text{ZF}^-$ . Äquivalent sind:

1.  $x \in \mathbf{WF}$ .
2.  $\text{th}(x) \in \mathbf{WF}$ .
3.  $\langle \text{th}(x), \in \rangle$  fundiert.

**Satz 1.33.** Relativierung auf fundierte Teilklassen. Wenn  $\text{ZF}^-$  konsistent ist, dann ist ZF konsistent.

Beiweisskizze: Wir nehmen ein  $\text{ZF}^-$ -Modell, und schneiden dann mit  $\mathbf{WF}$ , und der Schnitt ist ein ZF-Modell.

## Kapitel 2

# Ordinalzahlarithmetik und die Peano-Axiome

Wir wiederholen:

**Definition 2.1.** Eine Menge  $x$  heißt transitiv gdw  $\forall y \in x \forall z \in y z \in x$ .

Beispiele:  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ .

Gegenbeispiele:  $\{\{\emptyset\}\}, x \neq \emptyset$ , dann ist  $\{x\}$  nicht transitiv.

**Definition 2.2.** Eine Menge  $x$  heißt Ordinalzahl (kurz  $\mathbf{On}(x)$  oder  $x \in \mathbf{On}$ ) gdw  $x$  transitiv ist und  $\langle x, \in \rangle$  eine Wohlordnung ist.

**Satz 2.3.** 1. Wenn  $x$  eine Ordinalzahl ist und  $y \in x$  ist, dann ist auch  $y$  eine Ordinalzahl.

2. Wenn  $x$  und  $y$  Ordinalzahlen sind und  $\langle x, \in \rangle \cong \langle y, \in \rangle$  ist, dann ist  $x = y$ .

3. Wenn  $x$  und  $y$  Ordinalzahlen sind, dann ist  $\langle x, \in \rangle \cong \langle y, \in \rangle$  oder  $x \in y$  oder  $y \in x$ .

4. Wenn  $x, y$  und  $z$  Ordinalzahlen sind und  $x \in y$  und  $y \in z$ , dann ist  $x \in z$ .

5. Wenn  $C$  eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen ist, dann gibt es ein  $x \in C$ , so dass  $\forall y \in x y \notin C$ .

Beweis: 1. Da Anfangsabschnitte von Wohlordnungen (mit derselben Ordnungsrelation) wieder Wohlordnungen sind, genügt es zu zeigen, dass  $y$  auch transitiv ist. Sei hierzu  $z \in y$ . Wir behaupten, dass  $z \subseteq y$ . Da aus der Transitivität von  $x$  folgt, dass  $z \in x$ , haben wir  $z \subseteq x$ . Sei nun  $u \in z$ . Dann ist  $u \in z \in y$  und wegen der Transitivität der linearen Ordnung  $\in$  auf  $x$  daher  $u \in y$ . Also  $z \subseteq y$ , wie behauptet.

2. Sei  $f: \langle x, \in \rangle \cong \langle y, \in \rangle$ . Wir behaupten, dass  $\text{id}: \langle x, \in \rangle \cong \langle y, \in \rangle$ . Das kleinste Element von  $x$  muss  $\emptyset$  sein, da das kleinste Element  $m$  keine  $\in$ -Vorgänger in  $x$  und daher keine  $\in$ -Vorgänger im Universum hat:  $x$  ist transitiv, d.h., wenn  $m \in x$ , dann  $m \subseteq x$ . Also sind alle  $\in$ -Vorgänger von  $m$ , die es im Universum gibt, schon in  $x$ . Dasselbe gilt für  $y$ . Wir haben daher  $f(\emptyset) = \emptyset$ .

Da  $f$  die  $\in$ -Relation erhalten soll, gilt nun induktiv über die Wohlordnung  $\langle x, \in \rangle$ ,  $f(u) = \{f(w) \mid w \in u\} = \{w \mid w \in u\} = u$ . Insgesamt hat man also  $x = \text{dom}(f) = \text{rge}(f) = y$ .

3. Dies folgt aus dem Trichotomiesatz für die Wohlordnungen und dem Punkt 2. dieses Satzes: Es gilt  $\langle x, \in \rangle \cong \langle y, \in \rangle$  oder  $(\exists z \in x (\langle z, \in \rangle \cong \langle y, \in \rangle))$  oder  $(\exists z \in y (\langle x, \in \rangle \cong \langle z, \in \rangle))$ . Nun ersetzen wir nach dem vorigen Punkt die Isomorphismen durch die Gleichheiten und erhalten  $x = y$  oder  $y = z \in x$  oder  $x = z \in y$ .

4.  $z$  ist nach Definition transitiv.

5. Sei  $y \in C$ . Wenn  $y \cap C \neq \emptyset$ , dann nimmt man das  $\in$ -minimale Element  $x$  von  $y \cap C$  in der Wohlordnung  $\langle y, \in \rangle$ . Dann  $\forall y \in x (y \notin C)$ . Wenn  $y \cap C = \emptyset$ , dann ist  $y$  selbst das gesuchte  $\in$ -Minimum.  $\square$

**Satz 2.4.** *Die Antinomie von Burali-Forti 1897.  $\{z \mid z \text{ Ordinalzahl}\}$  ist eine echte Klasse.*

Beweis: Sonst wäre  $u = \{z \mid z \text{ Ordinalzahl}\}$  eine Menge. Dann wäre nach den Punkten 3., 4. und 5. des vorigen Satzes  $u$  selbst eine Ordinalzahl. Somit wäre  $u \in u$ , was dem Lemma 1.14 widerspricht.  $\square$

**Lemma 2.5.** *Eine Menge  $C$  von Ordinalzahlen ist eine Ordinalzahl gwd  $\forall x \in C \forall y \in x (y \in C)$ .*

Beweis:  $\rightarrow$ : Ordinalzahlen sind transitiv.  $\leftarrow$ :  $C$  ist durch  $\in$  wohlgeordnet, da Teilmengen von Wohlordnungen selbst Wohlordnungen sind.  $C$  ist nach Voraussetzung transitiv.  $\square$

**Satz 2.6.** *Zu jeder Wohlordnung  $\langle A, R \rangle$  gibt es genau eine Ordinalzahl  $x$ , so dass  $\langle A, R \rangle \cong \langle x, \in \rangle$ .*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus Punkt 2. des Satzes 2.3. Wir bilden die folgende Menge:

$$B = \{a \in A \mid \exists x (x \in \mathbf{On} \wedge \langle \text{pred}(A, a, R), R \rangle \cong \langle x, \in \rangle)\},$$

und bilden eine Funktion  $f: B \rightarrow \mathbf{On}$  mit der Definition, dass  $f(a)$  das eindeutig bestimmte  $x$  ist so dass  $\langle \text{pred}(A, a, R), R \rangle \cong \langle x, \in \rangle$ . Nach dem Ersetzungsaxiom ist  $\text{rge}(f)$  eine Menge. Man rechnet leicht nach, dass  $\forall x \in \text{rge}(f) \forall y \in x (y \in \text{rge}(f))$ . Nach dem vorigen Lemma ist  $\text{rge}(f)$  eine Ordinalzahl. Wir behaupten dass  $B = A$ .  $B$  ist eine Teilmenge von  $A$ , die gegen  $R$ -Vorgänger abgeschlossen ist. Falls  $B \neq A$ , dann sei  $b$  das  $R$ -minimale Element von  $A \setminus B$ . Dann ist aber  $f$  ein Zeuge für einen Isomorphismus  $\langle \text{pred}(A, b, R), R \rangle \cong \langle z, \in \rangle$ , und somit  $b \in B$ , Widerspruch.  $\square$

Bemerkung (ohne Beweis): In ZFC ohne Ers kann man Satz 2.6 nicht beweisen.

**Definition 2.7.** Für Wohlordnungen  $\langle A, R \rangle$  sei  $\text{otp}(A, R)$  die Ordinalzahl  $x$ , so dass  $\langle A, R \rangle \cong \langle x, \in \rangle$ .  $\text{otp}(A, R)$  steht für Ordnungstyp von  $\langle A, R \rangle$ , d.h., für seinen Isomorphietyp in der Klasse aller Strukturen mit einem einzigen zweistelligen Relationssymbol.

Konventionen: Wir schreiben kleine griechische Buchstaben für Ordinalzahlen. Wir schreiben  $\alpha$  statt  $\langle \alpha, \in \rangle$ , wenn dies nicht zu Missverständnissen führt. Außerdem kürzen wir Quantifizierungen über Ordinalzahlen wie folgt ab:  $\forall \alpha \varphi(\alpha)$  steht für  $\forall x(x \in \mathbf{On} \rightarrow \varphi(x))$ .  $\exists \alpha \varphi(\alpha)$  steht für  $\exists x(x \in \mathbf{On} \wedge \varphi(x))$ . Wir schreiben manchmal  $\alpha < \beta$  für  $\alpha \in \beta$  und  $\alpha \leq \beta$  für  $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$ . Wir benützen auch die umgekehrten Ordnungssymbole.

**Definition 2.8.** Wenn  $x$  eine Menge von Ordinalzahlen ist, dann schreiben wir  $\sup x = \bigcup x$  und, wenn  $x \neq \emptyset$ , dann setzen wir  $\min x = \bigcap x$ .

**Lemma 2.9.** 1.  $\forall \alpha, \beta (\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta)$ .

2. Wenn  $x$  eine Menge von Ordinalzahlen ist, dann ist  $\sup x$  die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$ , so dass  $\forall y \in x (y \leq \alpha)$ .

3. Wenn  $x$  eine nicht leere Menge von Ordinalzahlen ist, dann ist  $\min x$  die kleinste Ordinalzahl in  $x$ .  $\square$

Ist  $\sup x \in x$ ? Wir werden sehen, dass es beide Möglichkeiten gibt.

**Definition 2.10.** Zu jeder Ordinalzahl  $\alpha$  definieren wir ihren ordinalen Nachfolger (successor)  $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ . Allgemein setzen wir  $S(x) = x \cup \{x\}$ .

$S(\alpha)$  ist eine Ordinalzahl.

**Lemma 2.11.**  $\forall \alpha (\alpha < S(\alpha) \wedge \forall \beta (\beta < S(\alpha) \rightarrow \beta \leq \alpha))$ .

**Definition 2.12.** 1.  $\alpha$  heißt Nachfolgerordinalzahl gdw  $\exists \beta (\alpha = S(\beta))$ .

2.  $\alpha$  heißt Limesordinalzahl gdw  $\alpha$  keine Nachfolgerordinalzahl und nicht  $\emptyset$  ist. Wir schreiben  $\lim(\alpha)$  für „ $\alpha$  ist eine Limesordinalzahl“.

**Definition 2.13.** Dies sind unendlich viele Definitionen!  $0 := \emptyset$ ,  $1 = S(0)$ ,  $2 = S(1)$ , usf.

Wir haben also  $1 = \{0\}$ .  $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$ ,  $3 = \{0, 1, 2\}$ ,  $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ , usf. Dies sind die sogenannten von Neumann'schen natürlichen Zahlen.

**Definition 2.14.**  $\alpha$  ist eine natürliche Zahl gdw  $\forall \beta \leq \alpha (\beta = 0 \vee \beta \text{ Nachfolger})$ .

Nun berufen wir uns auf das Unendlichkeitsaxiom **Inf**, das sagt

$$\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x)).$$

**Definition 2.15.** Sei  $x$  wie in **Inf**. Dann ist

$$\omega = \{z \in x \mid z \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$

**Satz 2.16.**  $\omega$  erfüllt die sogenannten Peano-Axiome, d.h.

1.  $0 \in \omega$ ,

2.  $\forall n \in \omega (S(n) \in \omega)$ ,
3.  $\forall n, m \in \omega (n \neq m \rightarrow S(n) \neq S(m))$ ,
4.  $\forall x \subseteq \omega ((0 \in x \wedge \forall n \in x (S(n) \in x)) \rightarrow \omega \subseteq x)$ .

Beweis: 1. 0 ist eine natürliche Zahl und 2. für jede natürliche Zahl  $\alpha$  ist auch  $S(\alpha)$  eine natürliche Zahl. 3. Sei  $S(n) = S(m)$  dann ist  $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$  und daher  $n = \sup(n \cup \{n\}) = \sup(m \cup \{m\}) = m$ . 4. Man nimmt an, dass  $\omega \setminus x \neq \emptyset$ . Dann sei  $n = \min \omega \setminus x$ .  $n \neq 0$ , da  $0 \in X$ , daher ist  $n = S(m)$  für ein  $m$ . Dann haben wir  $m \in x$ , da  $n$  minimal außerhalb war. Aber nach der Voraussetzung ist dann auch  $n = S(m) \in x$ . Widerspruch.  $\square$

Man kann mithilfe dieser Axiome und ZFC ohne Inf die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen aufbauen, und auf diesen Mengen die bekannten Operationen  $+$  und  $\cdot$  definieren. Wir werden diesen Weg nicht weiter verfolgen, sondern  $+$  und  $\cdot$  auf allen geordneten Paaren von Ordinalzahlen definieren.

## 2.1 Addition und Multiplikation auf den Ordinalzahlen

**Definition 2.17.** (a)  $\alpha + \beta := \text{otp}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R)$  mit der Relation

$$R = \{ \langle \langle \xi, 0 \rangle, \langle \eta, 0 \rangle \rangle \mid \xi < \eta < \alpha \} \cup \\ \{ \langle \langle \xi, 1 \rangle, \langle \eta, 1 \rangle \rangle \mid \xi < \eta < \beta \} \cup \\ [(\alpha \times \{0\}) \times (\beta \times \{1\})].$$

(b) Versuch einer induktiven Definition. Für jedes  $\alpha$  definieren wir induktiv über On:

$$\alpha +_i 0 = \alpha, \\ \alpha +_i (S(\beta)) = S(\alpha +_i \beta), \\ \alpha +_i \lambda = \sup\{(\alpha +_i \beta) \mid \beta \in \lambda\}, \text{ für } \lim(\lambda).$$

Ist die induktive Definition von  $+_i$  wohldefiniert? Stimmen die beiden Definitionen gar überein?

Nach dem Rekursionssatz ist  $+_i$  wohldefiniert. Wir können die Operation  $+$  mit der Operation  $+_i$  vergleichen. Zuerst beweisen wir jedoch, dass  $+$  assoziativ ist, denn dies wird auch im Induktionsschritt des Vergleiches sehr nützlich sein.

**Lemma 2.18.** *Das Assoziativgesetz für  $+$ .  $\forall \alpha, \beta, \gamma (\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma)$ .*

Beweis:  $\alpha + (\beta + \gamma)$  hat den Träger

$$\{ \langle \alpha', 0 \rangle \mid \alpha' \in \alpha \} \cup \{ \langle \delta, 1 \rangle \mid \delta \in \beta + \gamma \} = \\ \{ \langle \alpha', 0 \rangle \mid \alpha' \in \alpha \} \cup \{ \langle \delta, 1 \rangle \mid \delta \in (\{ \langle \beta', 0 \rangle \mid \beta' < \beta \} \cup \{ \langle \gamma', 1 \rangle \mid \gamma' < \gamma \}) \} = \\ \{ \langle \alpha', 0 \rangle \mid \alpha' \in \alpha \} \cup \{ \langle \langle \beta', 0 \rangle, 1 \rangle \mid \beta' < \beta \} \cup \{ \langle \langle \gamma', 1 \rangle, 1 \rangle \mid \gamma' < \gamma \}.$$

und ist in der Reihenfolge des Aufschreibens angeordnet (wir interpretieren also mehr hinein, als das Extensionalitätsaxiom aussagt).

$(\alpha + \beta) + \gamma$  hat den Träger

$$\begin{aligned} & \{\langle \delta, 0 \rangle \mid \delta \in \alpha + \beta\} \cup \{\langle \delta, 1 \rangle \mid \delta \in \gamma\} = \\ & \{\langle \delta, 0 \rangle \mid \delta \in (\{\langle \alpha', 0 \rangle \mid \alpha' < \alpha\} \cup \{\langle \beta', 1 \rangle \mid \beta' < \beta\})\} \cup \{\langle \delta, 1 \rangle \mid \delta \in \gamma\} = \\ & \{\langle \langle \alpha', 0 \rangle, 0 \rangle \mid \alpha' \in \alpha\} \cup \{\langle \langle \beta', 1 \rangle, 0 \rangle \mid \beta' < \beta\} \cup \{\langle \gamma', 1 \rangle \mid \gamma' < \gamma\}. \end{aligned}$$

und ist in der Reihenfolge des Aufschreibens angeordnet. Nun definieren wir  $f$ :

$$\begin{aligned} f(\langle \alpha', 0 \rangle) &= \langle \langle \alpha', 0 \rangle, 0 \rangle \text{ für } \alpha' < \alpha, \\ f(\langle \langle \beta', 0 \rangle, 1 \rangle) &= \langle \langle \beta', 1 \rangle, 0 \rangle \text{ für } \beta' < \beta, \\ f(\langle \langle \gamma', 1 \rangle, 1 \rangle) &= \langle \gamma', 1 \rangle \text{ für } \gamma' < \gamma. \end{aligned}$$

und sehen, dass dies ein Isomorphismus ist.  $\square$

**Lemma 2.19.** *Das in Definition 2.17 (a) definierte  $+$  erfüllt die (eindeutig bestimmenden) Eigenschaften von  $+_i$  aus der Definition (b). Die beiden Definitionen ergeben also dieselbe definierbare Operation  $+$  auf  $\mathbf{On} \times \mathbf{On}$  (man sagt hierzu auch „zweistellige Operation auf  $\mathbf{On}$ “). Wir schreiben dann später nur noch  $+$ . Wir haben also zu zeigen*

1.  $\alpha + 0 = \alpha$ ,
2.  $\alpha + 1 = S(\alpha)$ ,
3.  $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$ ,
4.  $\lim(\beta) \rightarrow \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$ .

Beweis: 1.  $\alpha + 0 = \alpha$  nach der Definition von  $+$  und von  $+_i$ .

2.  $\alpha + 1 \cong S(\alpha) = \alpha +_i 1$  via  $f$  mit  $f(\langle \beta, 0 \rangle) = \beta$  für  $\beta < \alpha$  und  $f(\langle 0, 1 \rangle) = \alpha$ . Man liest in der Definition der Ordnung auf  $\alpha + 1$  nach, dass  $f$  ordnungstreu ist.

Nun haben wir den Nachfolgerschritt:  $\alpha + S(\beta) = \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 = (\alpha +_i \beta) + 1 = S(\alpha +_i \beta) = \alpha +_i S(\beta)$ , da  $+$  assoziativ ist.

3.  $\alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \delta \mid \delta \in \lambda\} = \bigcup\{\alpha +_i \delta \mid \delta \in \lambda\} = \alpha +_i \lambda$ .

4. Sei  $\lim(\beta)$ . Dann ist  $\bigcup \beta = \beta$  und daher  $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\} = \sup\{\alpha +_i \xi \mid \xi < \beta\} = \alpha +_i \beta$   $\square$

Ist  $+$  kommutativ? Nein.  $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$ . Das bekannte  $+$  auf den natürlichen Zahlen,  $+$   $\cap$   $(\omega \times \omega)$ , hingegen ist kommutativ.

**Definition 2.20.** (a)  $\alpha \cdot \beta := \text{otp}(\beta \times \alpha, R)$  mit der Relation

$$\langle \xi, \eta \rangle R \langle \xi', \eta' \rangle \leftrightarrow (\xi < \xi' \vee (\xi = \xi' \wedge \eta < \eta')).$$

(b) Für jedes  $\alpha$  definieren wir induktiv über  $\mathbf{On}$ :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot_i 0 &= 0, \\ \alpha \cdot_i (S(\beta)) &= \alpha \cdot_i \beta + \alpha, \\ \alpha \cdot_i \lambda &= \sup\{\alpha \cdot_i \beta \mid \beta \in \lambda\}, \text{ für } \lim(\lambda). \end{aligned}$$

**Lemma 2.21.** *Das Assoziativgesetz für  $\cdot$ .  $\forall \alpha, \beta, \gamma (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$ .*

**Lemma 2.22.** *Das in Definition 2.20 (a) definierte  $\cdot$  erfüllt die (eindeutig bestimmenden) Eigenschaften von  $\cdot_i$  aus der Definition (b). Die beiden Definitionen ergeben also dieselbe definierbare Operation  $\cdot$  auf  $\mathbf{On} \times \mathbf{On}$ . Wir schreiben nur noch  $\cdot$ . Wir haben also zu zeigen*

1.  $\alpha \cdot 0 = 0$ ,
2.  $\alpha \cdot 1 = \alpha$ ,
3.  $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$ ,
4.  $\lim(\beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta\}$ .

**Lemma 2.23.** *Das Rechts-Distributivgesetz für  $\cdot$ .  $\forall \alpha, \beta, \gamma (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma))$ .*

Warnung: Auch  $\cdot$  ist nicht kommutativ, und das Distributivgesetz gilt nur von rechts.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \omega &= \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega, \\ (1 + 1) \cdot \omega &= \omega \neq \omega + \omega. \end{aligned}$$

Auf den natürlichen Zahlen jedoch ist  $\cdot$  kommutativ, und daher folgt aus dem Lemma 2.23 auch das volle Distributivgesetz.

## 2.2 Die ordinale Exponentiation

### Räume endlicher Folgen

**Definition 2.24.** (a)  $A^n = \{f \mid f: n \rightarrow A\} = \{f \in \mathcal{P}(n \cup A) \mid f: n \rightarrow A\}$ .  
 (b)  $A^{<\omega} = \bigcup \{A^n \mid n \in \omega\}$ .

**Behauptung 2.25.** *Die Existenz von  $A^n$  und von  $A^{<\omega}$  kann auch ohne das Potenzmengenaxiom hergeleitet werden.*

Beweis: Man führt Induktion über  $n$  und braucht  $n$  Beweisschritte für die Begründung von  $A^n$ .

Wir zeigen also nun  $\forall n \in \omega \exists y \forall s (y \in y \leftrightarrow s: n \rightarrow A)$ . Wir kürzen  $\forall s (y \in y \leftrightarrow s: n \rightarrow A)$  mit  $\varphi(n, y)$  ab. Beweis:  $n = 1$ .  $y = A$ . Schritt von  $n$  nach  $n + 1$ :  $y = A^{n+1} \cong A^n \times A$ . Die Existenz von  $A^n$  und  $A$  hat man schon nachgewiesen. Das Produkt existiert nach der Argumentation von Lemma 1.6. Wir haben sogar  $\forall n \in \omega \exists! y \varphi(n, y)$ . Daher können wir die Existenz von  $A^{<\omega}$  nun aus dem Ersetzungsaxiom folgern.  $\square$

**Definition 2.26.**  $(x_0, \dots, x_{n-1})$  ist die Funktion  $s: n \rightarrow \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ , so dass für alle  $i < n$ ,  $s(i) = x_i$ .

Bemerkung:  $(x_0, x_1) \neq \langle x_0, x_1 \rangle$ , doch es erfüllt dieselben Zwecke.  $\langle x_0, x_1 \rangle = \{\{x_0\}, \{x_0, x_1\}\}$ .  $(x_0, x_1) = \{\langle 0, x_0 \rangle, \langle 1, x_1 \rangle\} = \{\{\{0\}, \{0, x_0\}\}, \{\{1\}, \{1, x_1\}\}\}$ .

**Definition 2.27.** Für Funktionen  $s, t$  so dass  $\text{dom}(s) = \alpha$  und  $\text{dom}(t) = \beta$  definieren wir die Zusammenhängung oder Konkatenation  $s \hat{\ } t$  von  $s$  und  $t$  wie folgt:  $\text{dom}(s \hat{\ } t) = \alpha + \beta$ ,  $(s \hat{\ } t) \upharpoonright \alpha = s$  und  $(s \hat{\ } t)(\alpha + \xi) = t(\xi)$  für  $\xi \in \beta$ .

Schließlich gibt es noch eine ordinale Exponentiation, die wie die anderen Operationen auch, auf den natürlichen Zahlen mit der bekannten Exponentiation übereinstimmt. Mit Behauptung 2.25 lässt sich in der Definition 2.28 auch in Teil (a) auf das Potenzmengenaxiom verzichten. In Teil (b) beruft man sich sowieso nur auf die Existenz von Kreuzprodukten.

**Definition 2.28.** (a)  $\exp_{ord}(\alpha, \beta) := \text{otp}(\{f \in \mathcal{P}(\beta \times \alpha) \mid f: \beta \rightarrow \alpha, f(\gamma) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } \gamma\}, R)$  mit der Relation

$$fRg \leftrightarrow \exists \gamma < \beta (f \upharpoonright [\gamma + 1, \beta) = g \upharpoonright [\gamma + 1, \beta) \wedge f(\gamma) < g(\gamma))$$

(b) Für jedes  $\alpha$  definieren wir induktiv über  $\text{On}$ :

$$\begin{aligned} \exp_i(\alpha, 0) &= 1, \\ \exp_i(\alpha, S(\beta)) &= \exp_i(\alpha, \beta) \cdot \alpha, \\ \exp_i(\alpha, \lambda) &= \sup\{\exp_i(\alpha, \beta) \mid \beta \in \lambda\}, \text{ für } \text{lim}(\lambda). \end{aligned}$$

**Lemma 2.29.** *Das in Definition 2.28 (a) definierte  $\exp_{ord}$  erfüllt die (eindeutig bestimmenden) Eigenschaften von  $\exp_i$  aus der Definition (b). Die beiden Definitionen ergeben also dieselbe definierbare Operation  $\exp_{ord}$  auf  $\text{On} \times \text{On}$ . Wir schreiben nur noch  $\exp_{ord}$ . Wir haben also zu zeigen*

1.  $\exp_{ord}(\alpha, 0) = 1$ ,
2.  $\exp_{ord}(\alpha, 1) = \alpha$ ,
3.  $\exp_{ord}(\alpha, S(\beta)) = \exp_{ord}(\alpha, \beta) \cdot \alpha$ ,
4.  $\text{lim}(\beta) \rightarrow \exp_{ord}(\alpha, \beta) = \sup\{\exp_{ord}(\alpha, \xi) \mid \xi < \beta\}$ .

Beweis: Teil 4. ist nicht ganz offensichtlich und kann mit der sogenannten Cantor'schen Normalform von Ordinalzahlen gezeigt werden: Wir schreiben nun kurz  $\alpha^\beta$  für  $\exp_{ord}(\alpha, \beta)$ . Zu jedem  $\gamma < \exp_{ord}(\alpha, \beta)$  gibt es  $\beta > \beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_0$  und  $x_i < \alpha$  so dass

$$\gamma = \alpha^{\beta_n} \cdot x_n + \alpha^{\beta_{n-1}} \cdot x_{n-1} + \dots + \alpha^{\beta_0} \cdot x_0.$$

Wir führen den Nachfolger-Induktionsschritt durch: Sei  $\exp_{ord}(\alpha, \beta) \leq \gamma < \exp_{ord}(\alpha, S(\beta))$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte  $d < \alpha$  und  $r < \alpha^\beta$ , so dass  $\gamma = \alpha^\beta \cdot d + r$ .  $r$  lässt sich nach Induktionsvoraussetzung schreiben als  $r = \sum_{i=0}^n \alpha^{\beta_i} \cdot x_i$  für geeignete  $n$ ,  $\beta_i < \beta$  und  $x_i < \alpha$ ,  $i < n$ . Wir setzen diese Darstellung für  $r$  ein und erhalten eine um einen Summanden längere Darstellung von  $\gamma$ .

Die Abbildung, die  $f: \beta \rightarrow \alpha$  mit  $f(\beta_i) = x_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$  und  $f(\beta') = 0$  sonst, den Wert  $\alpha^{\beta_n} \cdot x_n + \alpha^{\beta_{n-1}} \cdot x_{n-1} + \dots + \alpha^{\beta_0} \cdot x_0$  zuordnet, ist ein Isomorphismus zwischen  $(\{f: \beta \rightarrow \alpha \mid f(\gamma) = 0 \text{ bis auf endlich viele } \gamma\}, R)$  und  $(\alpha^\beta, \in)$ .  $\square$

**Lemma 2.30.**  $\forall \alpha, \beta, \gamma$ :

1.  $\exp_{ord}(\alpha, \beta + \gamma) = \exp_{ord}(\alpha, \beta) \cdot \exp_{ord}(\alpha, \gamma)$ .
2.  $\exp_{ord}(\alpha, \beta \cdot \gamma) = \exp_{ord}(\exp_{ord}(\alpha, \beta), \gamma)$ .

### Warnung

Beachten Sie, dass die ordinale Exponentiation nicht das ist, was man gewöhnlich im Unendlichen unter Exponentiation versteht. Gewöhnlich steht das Hochstellen für die kardinale Exponentiation. Es ist  $\exp(2, \omega) = \omega \neq 2^\omega$ . Wir werden die Ungleichung im Kapitel über Kardinalzahlen beweisen.

Bemerkung: Mit der Cantor'schen Normalform zu Basis  $\alpha = \omega$  kann man in ZFC beweisen, dass Goodsteinfolgen gegen 0 konvergieren. Kirby und Paris[18] zeigen, dass diese Tatsache nicht aus der Peano-Arithmetik folgt.

## 2.3 Die Peano-Arithmetik

Sei nun  $\tau = \{0, 1, +, \cdot, S, <\}$  mit Konstanten 0,1, der einstelligen Nachfolgerfunktion  $S$ , den zweistelligen Funktionen  $+$  und  $\cdot$  und der zweistelligen Relation  $<$ .

**Definition 2.31.** Die Robinson'schen Axiome  $Q$  sind in der Sprache  $\mathcal{L}(\tau)$  abgefasst und sagen folgendes:

- S1.  $\forall x(Sx \neq 0)$ .
- S2.  $\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$ .
- L1.  $\forall x \forall y(x < Sy \leftrightarrow x \leq y)$ .
- L2.  $\forall x(x \not< 0)$ .
- L3.  $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$ .
- A1.  $\forall x(x + 0 = x)$ .
- A2.  $\forall x \forall y(x + Sy = S(x + y))$ .
- M1.  $\forall x(x \cdot 0 = 0)$ .
- M2.  $\forall x \forall y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$ .

Die Robinsonsche (nach Raphael Robinson) Theorie  $Q$  ist endlich axiomatisierbar und erblich unentscheidbar. [32]

**Definition 2.32.** Die *Peano-Arithmetik* kurz PA, erhält man, indem man zu  $Q$  für jede Formel  $\varphi$ , die möglicherweise zusätzlich zu  $x$  weitere freie Variablen enthält, das folgende Induktionsaxiom hinzufügt:

$$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx))) \rightarrow \forall x \varphi(x),$$

Die Peano-Axiome sind ein rekursiver Teilausschnitt von  $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$  und sind eines der subsystems of second order arithmetic. In der Untersuchung von Beweiskraft spielt die Peano-Arithmetik eine wichtige Rolle. Ein Standardwerk zu diesem Thema ist [28].

## Kapitel 3

# Kardinalzahlen, einfache Kardinalzahlarithmetik

Nun stellen wir uns eine noch bescheidenere Klassifikationsaufgabe: Wir möchten alle Strukturen mit keiner einzigen Relation (und keiner Funktion und keiner Konstanten) klassifizieren. Zwei solche Strukturen sind isomorph, gdw es eine Bijektion zwischen ihren Trägermengen gibt.

**Definition 3.1.** Seien  $A, B$  Mengen.

1. Wir sagen  $A$  ist schwächer als  $B$  und schreiben  $A \preceq B$  gdw es eine Injektion von  $A$  nach  $B$  gibt.
2. Wir sagen  $A$  ist äquivalent zu  $B$  oder mit  $B$  gleichmächtig, und schreiben  $A \sim B$  gdw es eine Bijektion von  $A$  auf  $B$  gibt.
3. Wir sagen  $A$  ist echt schwächer als  $B$  und schreiben  $A \prec B$  gdw  $A \preceq B$  und  $A \not\sim B$ .

**Satz 3.2.** (ZF<sup>-</sup> – P). *Der Satz von Cantor, Schröder, Bernstein, hier mit dem Beweis von Dedekind 1887.*

$$A \preceq B \wedge B \preceq A \rightarrow A \sim B.$$

Beweis: Dies wird mit Spiegeln gezeigt. Seien  $f: A \rightarrow B$  and  $g: B \rightarrow A$  beide injektiv.

Wir setzen  $C_0 = A \setminus \text{rge}(g)$ .  $C_{n+1} = g''f''C_n$

Nun definieren wir  $h: A \rightarrow B$  durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \bigcup_{n < \omega} C_n, \\ g^{-1}(x) & x \in A \setminus \bigcup_{n < \omega} C_n. \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert, da  $x \in \text{rge}(g)$ , wenn  $x \notin C_0$ .

Nun zeigen wir:  $h$  ist injektiv. Beweis: Sei  $x \neq x'$  gegeben. Wenn  $x'$  und  $x$  im selben Arm der Fallunterscheidung liegen, dann ist nichts zu zeigen, da  $f$  injektiv ist, und  $g$  funktional ist, also  $g^{-1}$  immer injektiv ist.

Sei also  $x \in C_m$  and  $x' \notin \bigcup_{n < \omega} C_n$ . Dann ist  $f(x) \in f''C_m$ . Andererseits ist  $h(x') = g^{-1}(x') \notin f''C_m$ , denn sonst wäre  $x' \in g''f''C_m = C_{m+1}$ .

Nun zeigen wir:  $h$  ist surjektiv.

Sei  $y \in B$ . Falls  $y \in \bigcup_{n < \omega} f''C_n$ . Dann ist  $y \in \text{rge}(h)$ . Falls  $y \notin \bigcup_{n < \omega} f''C_n$ . Dann ist  $g(y) \notin \bigcup_{n < \omega} C_{n+1}$  und  $g(y) \notin C_0$ . Dann ist  $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$ .  $\square$

Geschichte des Cantor-Schröder-Bernstein-Satzes: Vorgeschlagen wurde der Satz von Cantor, doch Cantor verwendete AC zum Beweis. Ernst Schröder kündigte den Satz 1896 an, und veröffentlichte 1898 einen unvollständigen Beweis. 1898 veröffentlichte Felix Bernstein in einem Buch von Borel den ersten vollständigen Beweis ohne Benutzung des Auswahlaxioms.

Später stellte sich heraus, dass der Satz schon 1887 von Richard Dedekind bewiesen worden war.

**Definition 3.3.** Wenn  $A$  wohlgeordnet werden kann, dann sei

$$|A| = \min\{\alpha \mid \alpha \sim A\}$$

die Mächtigkeit oder Kardinalität (power, size, cardinality) von  $A$ .

Konvention: Wir verwenden  $|A|$  nur für Mengen  $A$ , die wohlgeordnet werden können. Unter AC sind dies alle Mengen.

Frage: Wieviele  $\alpha$  mit  $\alpha \sim A$  gibt es für ein festes  $A$ ?

Beispiel:  $\alpha \sim \alpha + 1$ , indem man aus  $1 + \alpha = \alpha$  eine (natürlich nicht ordnungserhaltende) Bijektion von  $\alpha$  und  $\alpha + 1$  baut. Ähnlich zeigt man  $\alpha \sim \alpha + \alpha$ .

**Definition 3.4.**  $\alpha$  ist eine Kardinalzahl gdw  $|\alpha| = \alpha$ .

Nach Definition von  $|\alpha|$  ist also  $\forall \beta < |\alpha| (\beta \not\sim \alpha)$ .

Konventionen:  $\kappa, \lambda, \mu, \nu \dots$  werden bevorzugt für Kardinalzahlen genommen,  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  für Ordinalzahlen.

**Lemma 3.5.**  $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha \rightarrow |\beta| = |\alpha|$ .

Beweis:  $\beta \subseteq \alpha$  also  $\beta \preceq \alpha$ .  $\alpha \sim |\alpha| \subseteq \beta$ , daher  $\alpha \preceq \beta$ . Nach dem Satz 3.2 ist also  $\alpha \sim \beta$  und somit  $|\alpha| = |\beta|$ .  $\square$

**Lemma 3.6.** 1.  $\forall n \in \omega (n \not\sim n + 1)$ .

2.  $\forall n \in \omega \forall \alpha (\alpha \sim n \rightarrow \alpha = n)$ .

Beweis. 1. Induktiv.  $0 \not\sim 1$ . Annahme,  $n \sim n + 1$  mit einer Bijektion  $g$ . Dann betrachten wir  $g^{-1}(n) \in n$  und wählen eine Bijektion  $h: n \rightarrow n$ , so dass  $h^{-1}(g^{-1}(n)) = n - 1$ . Dann ist  $g \circ h: n \rightarrow n + 1$  bijektiv und  $g \circ h \upharpoonright n - 1: n - 1 \rightarrow n$  bijektiv, im Gegensatz zur Induktionsvoraussetzung.

2.  $n$  ist nach Teil 1. eine Kardinalzahl. Also folgt aus  $\alpha \sim n$ , dass  $\alpha \geq n$ . Doch wenn  $\alpha \geq n + 1$  wäre, dann würde folgen  $\alpha \succeq n + 1$ , im Widerspruch zur Voraussetzung  $\alpha \sim n$  und zum Teil 1:  $n \not\sim n + 1$ .  $\square$

**Lemma 3.7.** Jeder Limes von Kardinalzahlen ist eine Kardinalzahl.

Beweis: Sei  $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\}$ , und seien die  $\alpha_i$  paarweise verschiedene Kardinalzahlen. Nach einer eventuellen Umordnung seien die  $\alpha_i$  echt aufsteigend in der kardinalen Skala  $\prec$  gewählt, und sei  $I$  selbst eine Ordinalzahl (da  $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathbf{On}$  und daher wohlgeordnet ist, braucht man hierzu AC nicht). Sei also  $I = \beta$ , und sei  $\alpha_i \prec \alpha_j$  für  $i < j < \beta$ .  $\alpha$  ist eine Ordinalzahl nach Lemma 2.9 Teil 2. Da nach eben demselben Lemma  $\alpha$  die kleinste Ordinalzahl größer als alle  $\alpha_i$  ist, ist jedes  $\alpha' < \alpha$  schon  $\leq \alpha_i$  für ein  $i \in \beta$ . Aber dann ist  $\alpha' \leq \alpha_i \prec \alpha_{i+1} \leq \alpha$ , also  $\alpha' \not\prec \alpha$ . Daher ist  $\alpha$  eine Kardinalzahl.  $\square$

**Korollar 3.8.**  $\omega$  und alle  $n$ ,  $n \in \omega$ , sind Kardinalzahlen.

**Definition 3.9.**  $A$  heißt endlich (finite) gdw  $|A| < \omega$ .  $A$  heißt unendlich (infinite) gdw  $|A| \geq \omega$ .  $A$  heißt abzählbar (countable) gdw  $|A| \leq \omega$ .  $A$  heißt überabzählbar (uncountable) gdw  $|A| > \omega$ .

Bemerkung: Aus ZFC – P kann man die Existenz einer überabzählbaren Menge nicht herleiten. Wir werden später sehen, dass die Menge  $\mathcal{H}(\omega_1)$  der erblich abzählbaren Mengen (siehe hierzu 1.30 und 1.31) zusammen mit der  $\in$ -Relation ein Modell von ZFC – P ist.

### 3.1 Die kardinalen Operationen $\oplus$ und $\otimes$

**Definition 3.10.** 1.  $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$ .  
2.  $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$ .

**Lemma 3.11.** 1.  $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa = |\kappa + \lambda|$ .  
2.  $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa = |\kappa \cdot \lambda|$ .

**Lemma 3.12.**  $\forall n, m < \omega$   $n \oplus m = n + m < \omega$ ,  $m \otimes n = m \cdot n < \omega$ .

Beweis. Man zeigt induktiv über  $n$ , dass  $\forall m < \omega$  ( $m + n < \omega$ ), und, dass  $\forall m < \omega$  ( $m \cdot n < \omega$ ). Dann folgt der Rest aus Lemma 3.6, Teil 2.  $\square$

**Lemma 3.13.** Jede unendliche Kardinalzahl ist eine Limesordinalzahl.

Beweis: Sei  $\alpha$  unendlich. Dann ist  $\alpha \sim \alpha + 1$ . Da  $\alpha < \alpha + 1$ , ist  $\alpha + 1$  keine Kardinalzahl.  $\square$

Da Kardinalzahlen auch Ordinalzahlen sind, kann man auf der Klasse der Kardinalzahlen Induktion über  $\in$  führen. Dies wird im folgenden Satz getan. Man beachte, dass zwischendurch nicht kardinale  $\alpha$  vorkommen.

**Satz 3.14.** (Hessenberg, um 1900)  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Für jede unendliche Kardinalzahl ist  $\kappa \otimes \kappa = \kappa$ .

Beweis: Induktiv über  $\kappa$ . Gelte die Behauptung schon für alle unendlichen Kardinalzahlen  $\lambda < \kappa$ , und sei  $\kappa$  unendlich. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung, bzw. für endliche  $\alpha$  nach Lemma 3.12, für alle  $\alpha < \kappa$ ,

$$|\alpha \times \alpha| = |\alpha| \otimes |\alpha| < \kappa.$$

Nun definieren wir  $\triangleleft$  auf  $\kappa \times \kappa$  durch  $\langle \alpha, \beta \rangle \triangleleft \langle \gamma, \delta \rangle$  gdw

$$\begin{aligned} & \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee \\ & (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))) \end{aligned}$$

Jedes  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \kappa \times \kappa$  hat nun nach grober Abschätzung (die Identität als Injektion genügt, sie ist nicht ordnungstreu) wenige Vorgänger in der Ordnung  $\triangleleft$ :  $|\text{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \triangleleft)| \leq |(\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)| = |\max(\alpha, \beta) + 1| \odot |\max(\alpha, \beta) + 1| < \kappa$ .

Da  $\triangleleft$  eine Wohlordnung ist, in der alle Vorgängermengen von Mächtigkeit echt kleiner  $\kappa$  sind, ist  $\text{otp}(\kappa \times \kappa, \triangleleft) \leq \kappa$ . Also ist  $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$ .

Da aber andererseits natürlich  $|\kappa \times \kappa| \geq \kappa$  ist, folgt somit  $\kappa \otimes \kappa = \kappa$ .  $\square$

**Satz 3.15.** *Für unendliche  $\kappa, \lambda$  ist*

1.  $\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ .
2.  $|\kappa^{<\omega}| = \kappa$ .

Beweis: 1.  $\max(\kappa, \lambda) \leq \kappa \oplus \lambda \leq \kappa \otimes \lambda \leq \max(\kappa, \lambda) \otimes \max(\kappa, \lambda) = \max(\kappa, \lambda)$ .

2. Im Satz 3.14 wurde durch  $f(\langle \alpha, \beta \rangle) = \text{otp}(\text{pred}(\kappa \times \kappa, \langle \alpha, \beta \rangle, \triangleleft), \triangleleft)$  eine Bijektion  $f: \kappa \times \kappa \rightarrow \kappa$  gegeben. Für  $n = 0$  sei  $g_0: \{0\} \rightarrow \kappa$  beliebig. Für  $n = 1$  sei  $g_1: \kappa \rightarrow \kappa$  die Identität. Wir zeigen weiter induktiv über  $1 \leq n < \omega$ , dass

$$\exists g_n: \kappa^n \rightarrow \kappa,$$

indem wir

$$g_{n+1}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = f(\langle g_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}), \alpha_n \rangle)$$

setzen.

Danach definieren wir  $f: \bigcup_{0 \leq n < \omega} \kappa^n \rightarrow \omega \times \kappa$  injektiv durch  $f(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \langle n, g_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \rangle$ . Daraus folgt  $|\kappa^{<\omega}| \leq \omega \otimes \kappa = \kappa$ .  $\square$

Nun nehmen wir das Potenzmengenaxiom hinzu.  $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$  sei die Potenzmenge von  $x$ .

Den folgenden Satz (für  $\omega$ ) zeigte Cantor am 7.12.1873, und dieser Beweis gilt als die Geburtsstunde der Mengenlehre.

**Satz 3.16.**  $\text{ZF}^-$ . *Der Satz von Cantor.  $x \prec \mathcal{P}(x)$ .*

Beweis: Sei  $f: x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ . Wir zeigen, dass  $f$  nicht surjektiv ist. Dies genügt, denn es ist  $x \preceq \mathcal{P}(x)$ , und wenn auch  $\mathcal{P}(x) \preceq x$  wäre, dann gäbe es nach dem Satz von Cantor Schröder Bernstein 3.2 eine Bijektion, also zumindest eine Surjektion von  $x$  auf  $\mathcal{P}(x)$ . Wir bilden

$$u = \{y \in x \mid y \notin f(y)\} \in \mathcal{P}(x).$$

Dann gibt es kein  $y \in x$ , so dass  $f(y) = u$ : Denn wäre  $f(y) = u$ , dann hätte man  $y \in u \leftrightarrow y \notin f(y) = u$ .  $\square$

Nun folgert man (mit AC), dass  $|\mathcal{P}(x)| > |x|$ . Es gibt also insbesondere überabzählbare Kardinalzahlen.

Dieses kann man auch ohne AC, aber nun natürlich mit dem Potenzmengenaxiom, wie folgt herleiten:

**Satz 3.17.** (Hartogs, 1906)  $\text{ZF}^-$ .  $\forall \alpha \exists \kappa (\kappa > \alpha, \kappa \text{ Kard.z.})$

Beweis: Sei  $\alpha \geq \omega$ , denn für endliche  $\alpha$  gilt der Satz schon nach Lemma 3.6. Wir bilden die Menge

$$W = \{R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) \mid \langle \alpha, R \rangle \text{ ist eine Wohlordnung}\}.$$

Nach dem Ersetzungsaxiom ist dann auch

$$S = \{\text{otp}(A, R) \mid \langle A, R \rangle \in W\}$$

eine Menge.  $S$  ist eine Menge von Ordinalzahlen, und hat daher ein Supremum  $\text{sup}(S)$ , das eine Ordinalzahl ist.

Zunächst ist  $\text{sup}(S) \notin S$ , da  $\forall \beta \in S, (\beta + 1 \in S)$ . Außerdem folgt aus dieser Argumentation, dass  $\text{sup}(S) > \alpha$ .

Wir behaupten nun, dass  $\text{sup}(S)$  eine Kardinalzahl ist:

Wenn  $\text{sup}(S)$  keine Kardinalzahl wäre, gäbe es ein  $\beta < \text{sup}(S)$  mit  $\beta \sim \text{sup}(S)$ . Sei  $\beta$  minimal gewählt. Dann ist  $\beta$  eine Kardinalzahl. Da  $\beta < \text{sup}(S)$ , gibt es eine Wohlordnung  $R$  auf  $\alpha$  so dass  $\beta \leq \text{otp}(\alpha, R)$ . Also ist  $|\beta| \leq |\alpha|$ .

Wir wählen eine Bijektion  $f: \beta \rightarrow \text{sup}(S)$  und definieren  $R_\beta \subseteq \beta \times \beta$  durch  $\gamma R_\beta \gamma' \leftrightarrow f(\gamma) <_{\text{sup}(S)} f(\gamma')$ . Doch dann kann  $\beta$  durch (und natürlich auch das eventuell längere  $\alpha$  durch noch einen längeren Typ)

vom Typ  $\text{otp}(\beta, R_\beta) = \text{sup}(S)$  wohlgeordnet werden, im Widerspruch zu  $(\text{sup}(S) \notin S)$  und der Definition von  $\text{sup}(S)$ .  $\square$

**Definition 3.18.**  $\text{ZF}^-$ .

1.  $\alpha^+ = |\alpha|^+$  ist die kleinste Kardinalzahl  $> \alpha$ .
2.  $\kappa$  heißt Nachfolgerkardinalzahl gdw  $\exists \alpha < \kappa (\kappa = \alpha^+)$ .
3.  $\kappa$  heißt Limeskardinalzahl, gdw  $\kappa \neq \omega$  und  $\kappa$  keine Nachfolgerkardinalzahl ist.

**Definition 3.19.**  $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$  wird durch transfinite Induktion über  $\alpha$  definiert:

1.  $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$ ,
2.  $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ ,
3.  $\aleph_\lambda = \bigcup \{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$  für  $\text{lim}(\lambda)$ .

**Lemma 3.20.** 1. Jedes  $\omega_\alpha$  ist eine Kardinalzahl.

2. Jede unendliche Kardinalzahl ist ein  $\aleph_\alpha$  für ein  $\alpha$ .
3.  $\alpha < \beta \rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$ .

4.  $\aleph_\alpha$  ist eine Limeskardinalzahl  $\leftrightarrow \alpha$  ist eine Limesordinalzahl.  $\aleph_\alpha$  ist eine Nachfolgerkardinalzahl  $\leftrightarrow \alpha$  ist eine Nachfolgerordinalzahl.

Beweis: Man zeigt 1. und 3. zusammen durch Induktion über  $\alpha$ . Für den Limeschritt hat man dann schon Lemma 3.7, wenn man die Induktionsvoraussetzung von den Aussagen 1. und 3. unterhalb des Limes hat. Außerdem liefert jenes Lemma auch, dass die Limeskardinalzahl größer als alle früheren ist.

2. Zeigt man durch transfinite Induktion entlang  $\text{On}$ . Die Aussage folgt dann unmittelbar aus der Definition der  $\aleph$ -Operation.

4. Die Aussage stimmt auch für die dritte Klasse in der Trichotomie (Limes, Nachfolger, 0):  $\aleph_0$  und 0 sind auf beiden Seiten die einzigen Elemente der dritten Klasse. Induktiv folgt nun die Behauptung für die Nachfolgerordinalzahlen aus  $(\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$ . Ebenso folgt die Behauptung für die Limesordinalzahlen aus Teil 3. und der Rekursionsbedingung  $\aleph_\delta = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \delta\}$  für  $\text{lim}(\delta)$ .  $\square$

**Lemma 3.21.**  $\text{ZFC}^-$ . Aus Surjektionen kann man Umkehrungen auswählen (die dann, wie alle Umkehrungen, injektiv sind). Formal:  $\exists f: x \rightarrow y$  surjektiv, impliziert  $\exists g: y \rightarrow x$  injektiv.

Beweis: Seien  $\langle x, r \rangle$  eine Wohlordnung auf  $x$ . Dann definieren wir  $g(y) = \min_r((f^{-1})''\{y\})$ .  $\square$

*Bemerkung 3.22.* Es gilt (ohne AC)  $\exists f: \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \omega_1$  surjektiv. Aber (mit Forcing kann man dies zeigen) es gilt: Wenn ZF widerspruchsfrei ist, dann gibt es Modelle von ZF, in denen es keine injektive Funktion von  $\omega_1$  nach  $\mathcal{P}(\omega)$  gibt.

**Lemma 3.23.**  $\text{ZFC}^-$ . Sei  $\kappa \geq \omega$ . Gelte für alle  $\alpha < \kappa$ ,  $|X_\alpha| \leq \kappa$ . Dann ist  $|\bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha| \leq \kappa$ .

Beweis: Sei  $\mathcal{F} = \{\{f \mid f: X_\alpha \rightarrow \kappa \text{ injektiv}\} \mid \alpha < \kappa\}$ . Wegen der Annahme von AC können wir uns  $\mathcal{F}$  in der Form  $h = \{\langle \alpha, \{f \mid f: X_\alpha \rightarrow \kappa \text{ injektiv}\} \rangle \mid \alpha < \kappa\}$ , also wohlgeordnet vom Typ  $\kappa$ , aufschreiben.

Nun gibt es wieder nach AC' eine Auswahlfunktion auf  $\mathcal{F}$ , also, zusammengesetzt mit  $h$ , ein  $g: \kappa \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$  so dass für  $\alpha < \kappa$

$$g(\alpha): X_\alpha \rightarrow \kappa \text{ injektiv.}$$

Dann gibt es folgende Injektion:

$$\hat{g}: \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow \kappa \times \kappa,$$

die durch

$$\hat{g}(x) = (\alpha, g(\alpha)(x))$$

definiert ist, wobei  $\alpha = \min\{\beta < \kappa \mid x \in X_\beta\}$ . Schließlich kann man nach  $\hat{g}$  noch eine Injektion  $h: \kappa \times \kappa \rightarrow \kappa$  (nach Satz 3.14) anwenden.  $\square$

Eine wichtige Anwendung des Lemmas 3.23 in der Logik, Algebra, Topologie und Modelltheorie ist der sogenannte „absteigende Satz von Löwenheim und Skolem“ (zweistöckiger Hausbesitzer).

Hierzu definieren wir

**Definition 3.24.** Eine  $n$ -stellige Funktion auf  $A$  ist  $f: A^n \rightarrow A$  für  $n > 0$  und  $f \in A$  für  $n = 0$ .  $B \subseteq A$  heißt unter  $f$  abgeschlossen gdw  $f''B^n \subseteq B$  für  $n > 0$  und  $f \in B$  für  $n = 0$ . Eine endlichstellige Funktion ist eine  $n$ -stellige Funktion für ein  $n < \omega$ .

Wenn  $\mathcal{S}$  eine Menge endlich-stelliger Funktionen auf  $A$  ist, und  $B \subseteq A$  ist, dann ist der Abschluss von  $B$  unter  $\mathcal{S}$  die  $\subseteq$ -kleinste (wir müssen uns in diesem Fall überlegen, dass das Minimum existiert und auch das kleinste Element ist) Obermenge von  $B$ , die unter allen  $f \in \mathcal{S}$  abgeschlossen ist.

Man mache sich klar;  $C = \bigcap \{D \mid B \subseteq D \subseteq A \wedge D \text{ } \mathcal{S}\text{-abgeschlossen}\}$  ist selbst  $\mathcal{S}$ -abgeschlossen, daher existiert der Abschluss. Es wird ja, da  $A$  selbst  $\mathcal{S}$ -abgeschlossen ist, nicht der Durchschnitt über eine leere Familie gebildet.

Wie klein können Abschlüsse sein?

**Satz 3.25.**  $ZFC^-$ . Sei  $B \subseteq A$ ,  $|B| = \kappa$  unendlich. Sei  $\mathcal{S}$  eine Menge endlich-stelliger Funktionen auf  $A$ , und sei  $|\mathcal{S}| \leq \kappa$ . Dann hat der Abschluss von  $B$  unter  $\mathcal{S}$  auch Mächtigkeit  $\leq \kappa$ .

Beweis: Für  $f \in \mathcal{S}$  und  $D \subseteq A$  definieren wir

$$f * D = \begin{cases} f''D, & \text{wenn } f \text{ } n\text{-stellig, } n > 0, \\ \{f\}, & \text{wenn } f \text{ 0-stellig.} \end{cases}$$

Wenn nun  $|D| \leq \kappa$ , dann ist  $|f * D| \leq \kappa$ , da  $|\kappa^n| = \kappa$  nach dem Lemma 3.23. Nun definieren wir induktiv über  $n < \omega$  Mengen  $C_n$  durch

$$\begin{aligned} C_0 &= B, \\ C_{n+1} &= C_n \cup \bigcup \{f * C_n \mid f \in \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Induktiv über  $n$  folgt  $|C_n| \leq \kappa$ .

Nun rechnet man nach, dass  $C_\omega := \bigcup_{n < \omega} C_n$  gegen  $\mathcal{S}$  abgeschlossen ist.

Nun zieht man noch einmal AC und das Lemma 3.23 heran, um  $|C_\omega| \leq \kappa$  herzuleiten. (Selbst wenn alle bis auf  $\omega$  der  $X_\alpha$ 's im Lemma 3.23 leer sind, braucht man zu dessen Beweis AC.)  $\square$

Nun kommen wir zu einem Untergebiet, das bis heute zahlreiche ungelöste Probleme birgt:

## 3.2 Kardinale Exponentiation

**Definition 3.26.**  $ZF^-$ .  $(A^B =)^B A = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f: B \rightarrow A\}$ . ist die Menge aller Funktionen von  $B$  nach  $A$ .

**Definition 3.27.**  $ZFC^-$ .  $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$ .

Der eingeklammerte Teil der ersten Definition führt also zu einer doppelten Definition von  $\kappa^\lambda$  und manchmal zu kleinen Unstimmigkeiten. Wir werden daher die Schreibweise  ${}^B A$  bevorzugen. Aber in der Literatur ist die andere ebenso gebräuchlich.

**Lemma 3.28.**  $ZF^-$ .  $\forall \lambda \geq \omega \forall \kappa (2 \leq \kappa \leq \lambda \rightarrow \lambda_\kappa \sim \lambda_2 \sim \mathcal{P}(\lambda))$

Beweis: Mit charakteristischen Funktionen zeigt man  $\lambda_2 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

$\lambda_2 \preceq \lambda_\kappa \preceq \lambda_\lambda \preceq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \sim \mathcal{P}(\lambda) \sim \lambda_2$ , wobei in der Mitte der Satz 3.14 benutzt wurde.  $\square$

**Lemma 3.29.**  $ZFC^-$ . Seien  $\kappa, \lambda, \sigma$  Kardinalzahlen. Dann ist

1.  $\kappa^{\lambda \oplus \sigma} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\sigma$ .
2.  $(\kappa^\lambda)^\sigma = \kappa^{\lambda \otimes \sigma}$ .

Beweis: Ohne AC ist für  $B \cap C = \emptyset$

$$\begin{aligned} {}^{B \cup C}A &\sim {}^B A \times {}^C A, \\ {}^C({}^B A) &\sim {}^{C \times B} A. \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 3.30.** AC.  $2^\omega = \omega_1$  ist die Kontinuumshypothese, CH - continuum hypothesis.  $\forall \alpha (2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1})$  heißt die allgemeine Kontinuumshypothese, GCH — generalized continuum hypothesis.

Gödel zeigte 1938: Wenn ZFC konsistent ist, dann auch ZFC + CH. Cohen zeigte 1963: Wenn ZFC konsistent ist, dann auch ZFC +  $\neg$ CH. Die Kontinuumshypothese ist also unabhängig von ZFC.

### Konfinalitäten (cofinalities)

**Definition 3.31.**  $f$  heißt konfinale Abbildung von  $\alpha$  nach  $\beta$  gdw  $f: \alpha \rightarrow \beta$  und  $\forall \beta' < \beta \exists \alpha' < \alpha f(\alpha') \geq \beta'$ . Wir schreiben  $f: \alpha \xrightarrow{\text{konf}} \beta$ .

**Definition 3.32.**  $\text{cf}(\beta) = \min\{\alpha \leq \beta \mid \exists f: \alpha \rightarrow \beta, \text{konf}\}$  heißt die Konfinalität von  $\beta$ .

Für  $\beta = \alpha + 1$  ist  $f: \{0\} \rightarrow \beta$ , mit  $f(0) = \alpha$  konfinal. Also ist  $\text{cf}(\beta) = 1$ .

**Lemma 3.33.**  $\forall \beta \exists f: \text{cf}(\beta) \xrightarrow{\text{konf}} \beta \forall \xi < \eta < \text{cf}(\beta) (f(\xi) < f(\eta))$ .

Beweis: Sei  $g: \text{cf}(\beta) \rightarrow \beta$  eine konfinale Abbildung. Induktiv definieren wir  $f: \text{cf}(\beta) \rightarrow \beta$  durch

$$f(\eta) = \sup(\{g(\eta)\} \cup \sup\{f(\xi) + 1 \mid \xi < \eta\}) < \beta.$$

Da  $\text{cf}(\beta)$  minimal ist, wird das Supremum nicht vor  $\text{cf}(\beta)$  den Bildbereich  $\beta$  ausschöpfen. (Dies stimmt sogar für den degenerierten Fall  $\text{cf}(\beta) = 1$ .)  $\square$

**Lemma 3.34.** Sei  $\text{lim}(\alpha)$  und sei  $f: \alpha \xrightarrow{\text{konf}} \beta$  streng monoton (so wie im vorigen Lemma). Dann ist  $\text{cf}(\alpha) = \text{cf}(\beta)$ .

Beweis:  $\text{cf}(\beta) \leq \text{cf}(\alpha)$ , da es  $h: \text{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$  konfinal gibt, und  $f \circ h: \text{cf}(\alpha) \xrightarrow{\text{konf}} \alpha \xrightarrow{\text{konf}} \beta$ .

Sei  $g: \text{cf}(\beta) \rightarrow \beta$  konfinal. Dann ist  $h: \beta \rightarrow \alpha$  definiert durch  $h(\xi) = \min\{\eta \mid f(\eta) > g(\xi)\}$  konfinal, da  $f$  streng monoton und konfinal ist. Also ist  $h \circ g: \text{cf}(\beta) \rightarrow \alpha$  ein Zeuge für  $\text{cf}(\alpha) \leq \text{cf}(\beta)$ .  $\square$

**Korollar 3.35.**  $\text{cf}(\text{cf}(\beta)) = \text{cf}(\beta)$ .

Beweis: Nach dem vorigen Lemma, da nach dem vorvorigen Lemma ein  $f: \text{cf}(\beta) \rightarrow \beta$ , das streng monoton und konfinal ist, existiert.  $\square$

**Definition 3.36.**  $\beta$  heißt regulär gdw  $\text{lim}(\beta)$  und  $\text{cf}(\beta) = \beta$ .  $\beta$  heißt singulär gdw  $\text{lim}(\beta)$  und  $\text{cf}(\beta) < \beta$ .

**Lemma 3.37.** Wenn  $\beta$  regulär ist, dann ist  $\beta$  eine Kardinalzahl.

Beweis: Annahme  $\exists \alpha < \beta \exists f: \alpha \xrightarrow{\text{auf}} \beta$ . Dann wäre  $\text{cf}(\beta) \leq \alpha < \beta$ , also  $\beta$  singulär.  $\square$

**Lemma 3.38.**  $\omega$  und alle  $\text{cf}(\beta)$  sind regulär.

**Lemma 3.39.**  $\text{ZFC}^-$ . Für jedes  $\kappa$  ist  $\kappa^+$  regulär.

Beweis: Annahme:  $\text{cf}(\kappa^+) \leq \kappa$ . Dann sei  $f: \kappa \rightarrow \kappa^+$  konfinal. Dann ist  $\kappa^+ = \bigcup \{f(\xi) \mid \xi < \kappa\}$ . Da für alle  $\xi < \kappa$ ,  $|f(\xi)| = \kappa$ , ist also nach dem Lemma 3.23 (das AC benutzt)  $|\bigcup \{f(\xi) \mid \xi < \kappa\}| \leq \kappa$ , also ist  $\bigcup \{f(\xi) \mid \xi < \kappa\} \neq \kappa^+$ , im Widerspruch zur vorigen Zeile.  $\square$

*Bemerkung 3.40.*  $\text{Con}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZF} + \text{cf}(\omega_1) = \omega)$ .

Offen:  $\text{Con}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZF} + \text{alle Kardinalzahlen haben Kof.} \leq \omega)$ ?

**Lemma 3.41.** Wenn  $\text{lim}(\alpha)$  dann ist  $\text{cf}(\aleph_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$ .

Gibt es reguläre Limeskardinalzahlen  $\aleph_\alpha$ ? Für diese muss  $\aleph_\alpha = \alpha$  sein.

Man kann also mit einer Iteration probieren, zu einem Fixpunkt der  $\aleph$ -Operation zu gelangen:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \aleph_0, \\ \sigma_{n+1} &= \aleph_{\sigma_n}, \\ \sigma_\omega &= \sup\{\aleph_{\sigma_n} \mid n < \omega\}. \end{aligned}$$

Dann ist  $\sigma_\omega = \aleph_{\sigma_\omega}$ . Aber nun ist  $\text{cf}(\sigma_\omega) = \omega$ . Pech. Da reguläre Limeskardinalzahlen trotz des fehlenden Existenznachweises (sie gehören zu den sogenannten „großen Kardinalzahlen“ [17]) dennoch eine ungeheuer wichtige Rolle spielen, definiert man:

**Definition 3.42.** 1.  $\kappa$  heißt schwach unerreichbar (weakly inaccessible) gdw  $\kappa$  eine reguläre Limeskardinalzahl ist.

2. AC.  $\kappa$  heißt stark unerreichbar (strongly inaccessible) gdw  $\kappa > \omega$  regulär ist und

$$\forall \lambda < \kappa \ 2^\lambda < \kappa.$$

Nach dem Satz von Cantor ist jede stark unerreichbare Kardinalzahlen auch schwach unerreichbar.

**Lemma 3.43.** „Das Lemma von König“. Julius König, 1905.  $ZFC^-$ . Sei  $\kappa$  eine unendliche Kardinalzahl. Sei  $\text{cf}(\kappa) \leq \lambda$ . Dann ist

$$\kappa^\lambda > \kappa.$$

Beweis: Sei  $f: \lambda \rightarrow \kappa$  konfinal. Sei  $g: \kappa \rightarrow {}^\lambda \kappa$ . Wir zeigen, dass  $g$  nicht surjektiv ist. Sei  $h: \lambda \rightarrow \kappa$  gegeben durch

$$h(\alpha) = \min(\kappa \setminus \{g(\mu)(\alpha) \mid \mu < f(\alpha)\}).$$

Dann ist  $h \notin \text{rge}(g)$ . Denn, angenommen  $h = g(\mu)$ . Dann nehmen wir  $\alpha$ , so dass  $f(\alpha) > \mu$ . Dann ist  $g(\mu)(\alpha) \neq h(\alpha)$ , also  $h \neq g(\mu)$ .  $\square$

**Korollar 3.44.**  $ZFC$ .  $\forall \lambda \geq \omega (\text{cf}(2^\lambda) > \lambda)$ .

Beweis:  $(2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$ . Wenn  $\lambda \geq \text{cf}(2^\lambda)$  wäre, wäre die rechte Seite echt größer als die linke.  $\square$

**Lemma 3.45.**  $ZFC^- + GCH$ . Seien  $\kappa, \lambda \geq 2$ , und sei  $\lambda$  unendlich.

1.  $\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa^\lambda = \lambda^+$ .
2.  $\text{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \rightarrow \kappa^\lambda = \kappa^+$ .
3.  $\lambda < \text{cf}(\kappa) \rightarrow ({}^\lambda \kappa = \bigcup \{\lambda^\alpha \mid \alpha < \kappa\} \text{ und } |\lambda^\alpha| \stackrel{GCH}{=} (\max(\alpha, \lambda))^+ \leq \kappa)$ .

**Definition 3.46.**  $ZFC^-$ .

1.  $(A^{<\beta} =)^{<\beta} A = {}^{\beta>} A = \bigcup \{\alpha A \mid \alpha < \beta\}$ .
2.  $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda} \kappa|$ .

**Definition 3.47.** AC. Durch transfinite Rekursion über **On** wird die  $\beth$ -Operation (Beth-Operation) definiert. Sei  $\kappa$  eine unendliche Kardinalzahl:

1.  $\beth_0(\kappa) = \kappa$ .
2.  $\beth_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{\beth_\alpha(\kappa)}$ .
3.  $\beth_\delta(\kappa) = \sup\{\beth_\alpha(\kappa) \mid \alpha < \delta\}$  für  $\text{lim}(\delta)$ .

GCH ist also  $\forall \kappa \forall \alpha (\aleph_\alpha(\kappa) = \beth_\alpha(\kappa))$ .

## Kapitel 4

# Clubs und stationäre Mengen. Sätze von Fodor, Solovay und von Silver

Für den folgenden Abschnitt sei eine Kardinalzahl  $\kappa$  festgehalten, so dass  $\kappa > \omega$  und  $\text{cf}(\kappa) > \omega$ . Alles in diesem Abschnitt wird in  $\text{ZFC}^-$  geschlossen.

- Definition 4.1.**
1.  $C \subseteq \kappa$  heißt abgeschlossen (in  $\kappa$ ) gdw  $\forall \alpha < \kappa \sup(C \cap \alpha) \in C$ , falls  $C \cap \alpha \neq \emptyset$ .
  2.  $C \subseteq \kappa$  heißt unbeschränkt (in  $\kappa$ ) gdw  $\forall \alpha < \kappa \exists \beta \in C (\beta \geq \alpha)$ .
  3.  $C \subseteq \kappa$  heißt club (von closed und unbounded) (in  $\kappa$ ) gdw  $C$  abgeschlossen und unbeschränkt ist.

Jeder Endabschnitt von  $\kappa$  ist ein club. Wenn  $A \subseteq \kappa$  unbeschränkt ist, dann ist die Menge der Häufungspunkte von  $A$ ,  $\text{acc}(A) = \{\alpha < \kappa \mid \alpha = \sup(A \cap \alpha)\}$  in club. Man zeigt die Unbeschränktheit durch eine aufsteigende  $\omega$ -Folge und nutzt  $\text{cf}(\kappa) > \omega$ .

Wenn  $\kappa$  eine Limeskardinalzahl ist, dann ist  $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ Kard.}\}$  ein club nach den Lemmata 3.17 und 3.23.

**Lemma 4.2.** *Der Durchschnitt zweier clubs ist ein club.*

Beweis: Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Seien  $C, D$  clubs sei  $\gamma < \kappa$ . Wir wählen für  $i < \omega$ ,  $\alpha_i \in C, \beta_i \in D$ , so dass  $\gamma \leq \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \alpha_1 \dots$ . Dann ist  $\sup\{\alpha_i \mid i < \omega\} = \sup\{\beta_i \mid i < \omega\} \in C \cap D$ .  $\square$

**Lemma 4.3.** *Der Durchschnitt von weniger als  $\text{cf}(\kappa)$  (vielen) clubs ist ein club.*

Beweis: Induktiv über  $\mu < \text{cf}(\kappa)$ . Für endliche  $\mu$  folgt die Behauptung aus dem vorigen Lemma. Sei nun  $\mu$  unendliche Limesordinalzahl. Das Lemma sei schon für alle  $\alpha < \mu$  gezeigt. Sei  $\gamma < \kappa$  vorgegeben. Wir definieren  $f: \mu \rightarrow \kappa$  durch

$$f(\alpha) = \min\{\varepsilon \in \bigcap_{\xi < \alpha} C_\xi \mid \varepsilon \geq \gamma, \varepsilon \geq \sup f''\alpha\}.$$

Dann ist  $\gamma \leq \sup\{f(\alpha) \mid \alpha < \mu\} = \sup\{f(\alpha) \mid \beta < \alpha < \mu\} \in C_\beta$  (da  $\mu < \text{cf}(\kappa)$ ) für alle  $\beta < \mu$ , das Supremum liegt also in  $\bigcap_{\beta < \mu} C_\beta$ .

Fall  $\mu = \beta + 1$ , folgt der Induktionsschritt aus dem vorigen Lemma.  $\square$

**Definition 4.4.** Sei  $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa\mathcal{P}(\kappa)$ . Dann heißt

$$\Delta(A_\alpha)_{\alpha < \kappa} := \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta < \alpha} A_\beta\}$$

der Diagonalschnitt (the diagonal intersection) von  $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ .

**Satz 4.5.** Wenn  $\kappa = \text{cf}(\kappa) > \omega$  und  $C_\alpha$ ,  $\alpha < \kappa$  alle club sind, dann ist  $\Delta(C_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  club.

Beweis: Sei  $D = \Delta(C_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ . Zuerst zeigen wir, dass  $D$  abgeschlossen ist. Sei  $\beta < \alpha$  beliebig. Sei

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup(D \cap \alpha) \\ &= \sup(D \cap (\beta, \alpha) \cap \alpha) \\ &= \sup(D \cap C_\beta \cap (\beta, \alpha)) \in C_\beta. \end{aligned}$$

Nun liest man dies für alle  $\beta$  gemeinsam.

Nun zeigen wir, dass  $D$  unbeschränkt ist. Wegen Lemma 4.3 ist  $\bigcap_{\beta < \alpha} C_\beta$  club für jedes  $\alpha < \kappa$ . Sei  $\gamma < \kappa$  gegeben. Wir definieren durch Rekursion über  $\omega$ ,  $f: \omega \rightarrow \kappa$  durch  $f(0) = \gamma$ ,  $f(n+1) = \min(\bigcap_{\beta < f(n)} C_\beta \cap (f(n), \kappa))$ . Dann ist  $\sup\{f(n) \mid n \in \omega\} \in D$ .  $\square$

**Definition 4.6.** Eine Teilmenge  $S$  von  $\kappa$ , die jeden club schneidet, heißt stationär (in  $\kappa$ ).

## 4.1 Das Lemma von Fodor

**Satz 4.7.** Das Lemma von Fodor, oder das pressing down lemma, 1956. Sei  $\kappa = \text{cf}(\kappa) > \omega$ . Sei  $S \subseteq \kappa$  stationär. Sei  $f: S \rightarrow \kappa$  regressiv, d.h.,  $\forall \alpha \in S (f(\alpha) < \alpha)$ . Dann ist  $f$  auf einer stationären Teilmenge (in  $\kappa$ ) von  $S$  konstant.

Beweis: Die Vereinigung von  $< \text{cf}(\kappa)$  (vielen) nicht stationären Mengen ist nicht stationär. Der vorige Satz sagt also aus, dass die Diagonalvereinigung nicht stationärer Mengen  $N_\alpha$  nicht stationär ist, wobei die Diagonalvereinigung durch

$$\nabla(N_\alpha)_{\alpha < \kappa} = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta\}$$

definiert ist. Wenn also jedes  $(N_\beta)^c$  Obermenge eines club ist, dann ist  $(\nabla(N_\alpha)_{\alpha < \kappa})^c = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta\} = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta < \alpha} (N_\beta)^c\}$  nach dem vorigen Satz Obermenge eines club.

Nun ist aber  $S = \nabla(A_\alpha)_{\alpha < \kappa} = \{\gamma \mid \gamma \in \bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha\}$  für  $A_\alpha = \{\beta \in S \mid f(\beta) = \alpha\}$  stationär. Also muss ein  $A_\alpha$  stationär sein.  $\square$

Beispiel: Der Satz von Fodor ist scharf. Sei  $N \subseteq \kappa$  nicht stationär, und sei  $C$  ein club, so dass  $C \cap N = \emptyset$ . Dann definieren wir  $f: N \rightarrow \kappa$  durch  $f(\alpha) = \sup(\alpha \cap C) < \alpha$ , da  $\sup(\alpha \cap C) \in C \setminus N$ , also  $< \alpha$  sein muss, da  $\alpha \in N$  ist.

## 4.2 Disjunkte stationäre Mengen

**Satz 4.8.** *Solovay (1971).* Sei  $\kappa = \text{cf}(\kappa) > \omega$ . Dann lässt sich  $\kappa$  in  $\kappa$  (viele) disjunkte stationäre Mengen zerlegen.

Beweis: Sei  $S = \{\alpha \in \kappa \mid \text{cf}(\alpha) = \omega\}$ .  $S$  ist stationär in  $\kappa$ .

Nun wählen wir mit AC zu jedem  $\alpha \in S$  eine aufsteigende Folge  $(\delta_i^\alpha)_{i < \omega}$ , die gegen  $\alpha$  konvergiert.

Sei  $\omega < \beta$  beliebig. Dann gibt es zu  $\alpha \in S \setminus (\beta + 1)$  ein  $n(\alpha) < \omega$ , so dass  $\delta_{n(\alpha)}^\alpha > \beta$  ist. Nun nehmen wir den Satz von Fodor für die regressive Funktion, die jedem  $\alpha \in S \setminus \beta$ ,  $n(\alpha) < \omega$  zuordnet, und erhalten ein  $n_\beta$  so dass

$$R_\beta = \{\alpha \in S \setminus \beta \mid n(\alpha) = n_\beta\}$$

stationär ist.

Doch nun ist auch die auf  $R_\beta$  definierte Funktion  $\alpha \mapsto \delta_{n_\beta}^\alpha$  regressiv, und es gibt daher ein  $\delta^\beta$  und  $S_\beta \subset R_\beta$ ,  $S_\beta$  stationär in  $\kappa$ , so dass für  $\alpha \in S_\beta$ ,  $\delta_{n_\beta}^\alpha = \delta^\beta$  ist.

Da  $\delta^\beta > \beta$  ist, kann man diesen Prozess nun mit  $\beta_1 = \delta^\beta$  statt  $\beta$  wiederholen und erhält  $\delta^{\beta_1} > \beta_1$  und so weiter. Man startet immer mit  $S$ , nicht mit einem der  $R_\beta$  oder  $S_\beta$ . Man iteriert den Prozess für  $i < \kappa$ .  $\beta_{i+1} \geq \delta^{\beta_i}$ . Bei den Limeschritten nimmt man Suprema der  $\beta_i$ . Man iteriert diesen Prozess  $\kappa$ -mal. Alle  $\beta_i$  bleiben unterhalb  $\kappa$ , da man ja bei Schrittnummer  $i < \kappa$  in der Iteration ist und  $\text{cf}(\kappa) = \kappa$  ist.

Man hat also nun  $\{\beta_i \mid i < \kappa\}$  für eine Menge  $I$  der Mächtigkeit  $\kappa$ . Nach dem Schubfachprinzip 3.23 gibt es daher ein  $n < \omega$  und ein  $J \subseteq \kappa$ , so dass  $|J| = \kappa$  und ein  $n$ , so dass für alle  $\beta_i \in J$ ,  $n_{\beta_i} = n$  ist. Dann gilt für  $\beta \neq \gamma \in J$  für alle  $\alpha \in S_\beta$  und  $\alpha' \in S_\gamma$  da  $\delta^\beta \neq \delta^\gamma$  und da  $n_\beta = n_\gamma = n$ :

$$\delta^\beta = \delta_{n_\beta}^\alpha = \delta_n^\alpha \neq \delta_n^{\alpha'} = \delta_{n_\gamma}^{\alpha'} = \delta^\gamma.$$

Daher sind  $S_\beta \cap S_\gamma = \emptyset$ .

Schließlich vervollständigt man die Zerlegung durch Hinzufügen der Menge  $S_{rest} = \kappa \setminus (\bigcup_{\beta \in I \setminus J} S_\beta)$  zu  $S_{\min(J)}$ . Dann ergibt die Vereinigung aller  $S_\beta$ ,  $\beta \in J$ , ganz  $\kappa$ . Also sind die stationären Mengen paarweise disjunkt und ergeben vereinigt ganz  $\kappa$ , und dies sind gerade die Eigenschaften einer Zerlegung.  $\square$

*Bemerkung 4.9.* Man kann auch jede stationäre Teilmenge  $S$  von  $\kappa$  ihrerseits in  $\kappa$  stationäre Teilmengen zerlegen unter denselben Voraussetzungen. Dies werden wir hier nicht beweisen.

*Bemerkung 4.10.* Es gibt ZF-Modelle, in denen club in  $\omega_1 =$  stationär in  $\omega_1$ , in denen also der club-Filter  $= \{X \subseteq \omega_1 \mid \exists C (C \text{ club und } C \subseteq X)\}$  ein Ultrafilter ist. Der Gebrauch von AC is also kein Luxus. Für  $\kappa > \omega_1$  gibt es allerdings auch ohne AC immer disjunkte stationäre Mengen in  $\kappa$ . Können Sie welche benennen?

**Korollar 4.11.** *Jedes  $\kappa$  von überabzählbarer Konfinalität lässt sich in  $\text{cf}(\kappa)$  disjunkte stationäre Mengen zerlegen.*

Beweis: Sei  $f: \text{cf}(\kappa) \rightarrow \kappa$  konfinal, stetig und monoton. Seien  $S_\alpha$ ,  $\alpha < \kappa$ , wie im vorigen Satz ein Zerlegung von  $\text{cf}(\kappa)$  in disjunkte stationäre Teilmengen von  $\text{cf}(\kappa)$ . Dann ist für jedes  $\alpha$ ,  $f''S_\alpha$  stationär in  $\kappa$ : Denn sei  $D$  ein club in  $\kappa$ . Dann ist wegen der Monotonie und der Stetigkeit von  $f$  auch  $f^{-1}''D$  ein club in  $\text{cf}(\kappa)$ . Aber da  $f^{-1}''D \cap S_\alpha \neq \emptyset$  ist, ist auch  $D \cap f''S_\alpha \neq \emptyset$ .  $\square$

### 4.3 Der Satz von Silver

In diesem Unterabschnitt beweisen wir zum ersten Mal einen Satz, dessen Beweis nicht ganz so kurz ist. Jack Silver veröffentlichte diesen Satz 1974, und dieses ZFC-Ergebnis war ein Durchbruch. Denn in jener Zeit großer Forcing-Euphorie war eher das Gegenteil vermutet worden: dass man im Rahmen des Lemmas von König und der Monotonie die Kardinalzahlexponentiation durch Forcing „frei einrichten“ kann. Für  $2^\kappa$ ,  $\kappa$  regulär, zeigt man mit Easton-Forcing, dass jeder Verlauf der Exponentiationsfunktion in diesem Rahmen in einem Modell von ZFC realisiert werden kann.

**Satz 4.12.** *Silver [27]. Sei  $\kappa$  eine singuläre Kardinalzahl und sei  $\text{cf}(\kappa) > \omega$ . Sei  $E = \{\mu < \kappa \mid 2^\mu = \mu^+\}$  stationär in  $\kappa$ . Dann ist  $2^\kappa = \kappa^+$ .*

Beweis: Sei  $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \text{cf}(\kappa)\}$ , und sei  $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \text{cf}(\kappa) \rangle$  stetig und monoton wachsend und konfinal in  $\kappa$ . Dann ist  $S = \{\alpha < \text{cf}(\kappa) \mid \kappa_\alpha \in E\}$  eine stationäre Teilmenge von  $\text{cf}(\kappa)$ , da sie das Urbild einer stationären Menge unter einer stetigen wachsenden Funktion ist: Angenommen, es gäbe  $C \subseteq \text{cf}(\kappa)$  club in  $\text{cf}(\kappa)$  so dass  $C \cap S = \emptyset$ . Dann ist  $C' = \{\kappa_\alpha \mid \alpha \in C\}$  ein club in  $\kappa$ , und  $C' \cap E = \emptyset$ , im Widerspruch zur Voraussetzung über  $E$ .

Für  $A \subseteq \kappa$  definieren wir

$$f_A = \langle A \cap \kappa_\alpha \mid \alpha \in S \rangle \in \prod_{\alpha \in S} \mathcal{P}(\kappa_\alpha).$$

Die Familie  $\{f_A \mid A \subseteq \kappa\}$  ist fast disjunkt (almost disjoint), d.h., für  $A \neq B$  gibt es  $\alpha_0 < \kappa \forall \alpha \geq \alpha_0 (f_A(\alpha) \neq f_B(\alpha))$ . Der Satz von Silver folgt daher aus dem folgenden Satz über fast disjunkte Teilmengen:

**Satz 4.13.** *Sei  $\lambda > \omega$  und  $\text{cf}(\lambda) = \lambda$ . Sei  $e: \lambda \rightarrow \kappa$ ,  $e(\alpha) = \kappa_\alpha$  eine normale (d.h.: streng monotone, konfinale, stetige) Funktion. Sei  $\lambda < \kappa = 2^{<\kappa}$ . Sei  $S_0 \subseteq \lambda$  stationär und sei  $\forall \alpha \in S_0 |A_\alpha| \leq \kappa_\alpha^+$ . Dann hat jede fast disjunkte Teilmenge von  $\prod_{\alpha \in S_0} A_\alpha$  höchstens die Mächtigkeit  $\kappa^+$ .*

Beweis:

**Lemma 4.14.** *Sei  $S$  stationär in  $\lambda$ , und sei für  $\alpha \in S$ ,  $|B_\alpha| \leq \kappa_\alpha$ . Dann hat jede fast disjunkte Teilmenge von  $\prod_{\alpha \in S} B_\alpha$  die Mächtigkeit  $\leq \kappa$ .*

Beweis: Sei  $F$  fast disjunkt. Da  $C = \{\alpha < \lambda \mid \text{lim}(\alpha)\}$  club in  $\lambda$  ist, ist auch  $\text{lim}(S) := S \cap C \subseteq S$  stationär in  $\lambda$ . Dann ist  $\{f \upharpoonright \text{lim}(S) \mid f \in F\}$  auch fast disjunkt und gleich groß wie  $F$ , da die Einschränkung eine injektive Operation auf der fast disjunkten Familie ist. Daher bestehe ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $S$  nur aus Limesordinalzahlen. Außerdem sei  $B_\alpha = \kappa_\alpha$ , was man durch Bijektionen erreichen kann. Sei  $f \in F$ . Dann ist  $f(\alpha) < \kappa_\alpha$ , und, da  $\text{lim}(\alpha)$  und  $e$  normal,  $f(\alpha) < \kappa_{\beta_\alpha}$  für ein  $\beta_\alpha < \alpha$ . Wir setzen  $g(\alpha) = \beta_\alpha < \alpha$ . Fodors Lemma, angewandt auf  $g$  liefert ein  $S_f \subseteq S$ ,  $S_f$  stationär in  $\lambda$  und ein  $\beta$ , so dass für alle  $\alpha \in S_f$   $f(\alpha) < \kappa_\beta$ .  $f \upharpoonright S_f$  bestimmt  $f$  innerhalb der fast disjunkten Familie immer noch eindeutig.

$$f \upharpoonright S_f \in \bigcup \{ {}^T \mu \mid T \subseteq \lambda, \mu < \kappa \}. \quad |{}^T \mu| = \mu^{|T|} \leq \mu^\lambda \leq 2^{\max(\mu, \lambda)} \leq 2^{<\kappa} = \kappa. \\ |F| \leq \kappa \otimes 2^\lambda \otimes \kappa = \kappa. \quad \square_{4.14}$$

Wir setzen nun des Beweis des Satzes 4.13 fort: Wir nehmen an, dass  $A_\alpha = \kappa_\alpha^+$ . Sei  $F_0$  eine fast disjunkte Teilmenge von  $\prod_{\alpha \in S_0} A_\alpha$ . Wir definieren  $<_{\text{club}}$  auf  $F_0$ :

$$f <_{\text{club}} g \leftrightarrow \exists C \text{ club } \forall \alpha \in S_0 \cap C (f(\alpha) < g(\alpha)).$$

1.  $<_{\text{club}}$  ist eine Halbordnung. Irreflexiv:  $S_0 \cap C \neq \emptyset$ . Transitiv: Der Schnitt zweier clubs ist ein club.

2.  $\forall g \in F_0 |\{f \mid g \not<_{\text{club}} f\}| \leq \kappa$ . Wenn  $g \not<_{\text{club}} f$ , dann ist  $\{\alpha \in S_0 \mid g(\alpha) < f(\alpha)\} \cup (\lambda \setminus S_0)$  nicht die Obermenge eines club. Also ist  $S = \{\alpha \in S_0 \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)\}$  stationär. Da  $F_0$  fast disjunkt ist, sind  $f \in F_0$  schon durch  $f \upharpoonright S$  eindeutig bestimmt. Sei  $F_S = \{f \in F_0 \mid f \upharpoonright S \in \prod_{\alpha \in S} g(\alpha)\}$ .

Nach dem vorigen Lemma ist  $|F_S| \leq \kappa$ . Also ist  $\{f \mid g \not<_{\text{club}} f\} = \bigcup \{F_S \mid S \subseteq S_0, S \text{ stationär}\}$ . Daher ist  $|\{f \mid g \not<_{\text{club}} f\}| \leq 2^\lambda \otimes \kappa = \kappa$ . Der Satz von Silver und der Satz 4.13 folgen nun aus unserem abschließenden Lemma:

**Lemma 4.15.** *Sei  $\langle P, <_P \rangle$  eine Halbordnung auf  $P$  so dass*

$$\forall p \in P |\{q \in P \mid p \not<_P q\}| \leq \kappa.$$

*Dann ist  $|P| \leq \kappa^+$ .*

Beweis: Wir schreiben  $P_p = \{q \in P \mid p \not<_P q\}$ . Wir wenden Zorns Lemma an auf die induktive Halbordnung

$$\langle \{f: \langle \delta, \in \rangle \rightarrow \langle P, <_P \rangle \mid \delta \text{ On, } f \text{ streng monoton} \}, \subset \rangle$$

mit der Erweiterung von Funktionen als Halbordnungsrelation  $\subset$ .

Sei  $f_0: \delta_0 \rightarrow P$  maximal. Dann gilt:

$$\forall q \in P \exists \alpha < \delta_0 f_0(\alpha) \not\leq_P q.$$

Also ist  $P = \bigcup_{\alpha < \delta_0} P_{f_0(\alpha)}$ . Es ist  $f_0[\alpha] \subseteq P_{f_0(\alpha)}$  für  $\alpha < \delta_0$ . Also  $|f[\alpha]| \leq \kappa$ . daher ist  $|\alpha| \leq \kappa$ . Daher ist  $|\delta_0| \leq \kappa^+$ . Insgesamt ist

$$|P| \leq |\delta_0| \cdot \kappa \leq \kappa^+.$$

□<sub>4.12,4.13,4.15</sub>

# Kapitel 5

## Das Universum $\mathbf{L}$ der konstruktiblen Mengen

### 5.1 Definierbarkeit

Wir stellen nun das Gödel'sche Universum  $\mathbf{L}$  der konstruktiblen Mengen vor. Wir folgen lose Devlins Buch [6]. Dieses wird wie folgt definiert:

**Definition 5.1.**  $X \subseteq (M, \in)$  heißt definierbar in  $(M, \in)$  mit Parametern in  $M$  gdw es eine Formel  $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{L}(\in)$  und  $a_1, \dots, a_n \in M$  gibt, so dass

$$X = \{a_0 \in M \mid (M, \in) \models \varphi[(v_i | a_i)_{0 \leq i \leq n}]\}.$$

$\text{Def}(M) = \text{Def}(M, \in) = \{X \subseteq M \mid X \text{ definierbar in } (M, \in) \text{ mit Parametern in } M\}.$

**Definition 5.2.** Die Klasse  $\mathbf{L}$  wird definiert durch:

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = \text{Def}(L_\alpha),$$

$$L_\lambda = \bigcup \{L_\alpha \mid \alpha < \lambda\},$$

$$\mathbf{L} = \bigcup \{L_\alpha \mid \alpha \in \text{On}\}.$$

Wir möchten zeigen, dass diese Hierarchie im folgenden Sinne absolut definierbar ist: Sei  $\mathbf{ZF}^*$  die Teiltheorie von  $\mathbf{ZF}$ , bei der das Ersetzungsschema und das Aussonderungsschema auf Formeln mit höchstens 1000 Zeichen beschränkt wird. Wie möchten die folgende Eigenschaft garantieren:

Wenn  $M$  und  $N$  transitive Mengen sind und sowohl  $(M, \in)$  und  $(N, \in)$  Modelle von  $\mathbf{ZF}^*$  sind, dann für alle  $\alpha \in M \cap N$ ,  $L_\alpha^M = L_\alpha^N$ . Hierbei ist  $L_\alpha^M$  die Interpretation der Definition von  $L_\alpha$  in  $M$ . Diese sogenannte Relativierung einer Definition von  $\mathbf{V}$  auf einen kleineren Träger (der eine definierbare Klasse oder eine Menge sein kann) werden wir auch präzisieren.

Dies führt uns zu den Themen Definierbarkeit und Absolutheit.

Zuerst zeigen wir, dass die Relation  $y = \text{Def}(x)$  eine spezielle syntaktische Form hat.

## 5.2 Die Lévy-Hierarchie

**Definition 5.3.** Die Menge der  $\Delta_0$ -Formeln ist die kleinste Formelmengende, die die atomaren Formeln  $x \in y$  und  $x = y$  ( $x$  und  $y$  freie Variablen) enthält und unter  $\neg$ ,  $\wedge$  und eingeschränkter Quantifikation  $\forall x \in y$  abgeschlossen ist: Wenn  $\varphi$  eine  $\Delta_0$ -Formel ist, dann ist  $\forall x \in y \varphi$  eine  $\Delta_0$ -Formel.

**Definition 5.4.** Die Lévy-Hierarchie der  $\mathcal{L}(\in)$ -Formeln.  $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ . Eine  $\Sigma_{n+1}$ -Formel ist eine Formel von der Form  $\exists x_1 \dots \exists x_m \varphi$  mit einer  $\Pi_n$ -Formel  $\varphi$ . Eine  $\Pi_{n+1}$ -Formel ist eine Formel von der Form  $\forall x_1 \dots \forall x_m \varphi$  mit einer  $\Sigma_n$ -Formel  $\varphi$ .

$\Pi_n$ -Formeln sind also gerade die Negate von  $\Sigma_n$ -Formeln.

**Proposition 5.5.** (a) Seien  $M, N$  transitive Mengen (oder Klassen), sei  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Delta_0$ -Formel und seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in M \cap N$ . Dann gilt

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ gdw } N \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

(b) Seien  $M \subseteq N$  transitive Mengen (oder Klassen), sei  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Sigma_1$ -Formel und seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ . Dann gilt

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ impliziert } N \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

(c) Seien  $M \subseteq N$  transitive Mengen (oder Klassen), sei  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Pi_1$ -Formel und seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ . Dann gilt

$$N \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ impliziert } M \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Beweis: (a) Durch Induktion über den Aufbau von  $\varphi$ . Der interessanteste Fall ist  $\varphi = \forall x \in y \psi$ . Wenn  $M \models \forall x \in a \psi$ , dann gilt wegen der Transitivität von  $M$ ,  $M \models \psi(b)$  für alle  $b \in a$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist dann  $N \models \psi(b)$  für alle  $b \in a$ , und daher  $N \models \forall x \in a \psi(x)$ . Die Umkehrung folgt aus der Symmetrie von  $N$  und  $M$ . (b) und (c) werden ganz ähnlich bewiesen.  $\square$

Wir möchten nun eine Formel konstruieren, die die Eigenschaft „ $x$  ist transitiv und  $y = \text{Def}(x)$ “ ausdrückt. Dies verlangt eine Kodierung dieser Eigenschaft in der Mengenlehre analog zur Kodierung in der Arithmetik im ersten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz. Zunächst kodieren wir  $\mathcal{L}(\in)$ -Formeln durch natürliche Zahlen wie folgt:

$$\begin{aligned} \ulcorner v_i \in v_j \urcorner &= \langle 0, i, j \rangle \\ \ulcorner v_i = v_j \urcorner &= \langle 1, i, j \rangle \\ \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner &= \langle 2, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \neg \varphi \urcorner &= \langle 3, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \forall v_i \varphi \urcorner &= \langle 4, i, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \end{aligned}$$

Hierbei nehmen wir wieder injektive berechenbare Funktionen  $\langle \dots \rangle$ , z.B.  $\langle a, b \rangle = 2^{a+1} \cdot 3^{b+1}$  und  $\langle a, b, c \rangle = 2^{a+1} \cdot 3^{b+1} \cdot 5^{c+1}$ .

**Definition 5.6.** Nun definieren wir eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , diejenigen  $i$ , die Codes für eine Formel sind:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Formel}}(i) &\leftrightarrow \exists h[h: i + 1 \rightarrow 2 \wedge h(i) = 1 \wedge \forall j \leq i \\ &\exists k, \ell < j \\ &(j \in \{\langle 0, k, \ell \rangle, \langle 1, k, \ell \rangle, \langle 2, k, \ell \rangle, \langle 3, k \rangle, \langle 4, k, \ell \rangle\} \wedge (j = \langle 0, k, \ell \rangle \vee j = \langle 1, j, \ell \rangle \vee \\ &(j = \langle 2, k, \ell \rangle \wedge h(k) = 1 \wedge h(\ell) = 1) \vee \\ &(j = \langle 3, k \rangle \wedge h(k) = 0)) \vee \\ &(j = \langle 4, k, \ell \rangle \wedge h(\ell) = 1)))] \end{aligned}$$

**Definition 5.7.** Die Axiome der sogenannten basic set theory, BS, sind die folgenden: Extensionalität, Paarmengen, Vereinigungsmengen, Unendlichkeit, die Existenz von kartesischen Produkten,  $\Sigma_0$ -Komprehension.

**Beobachtung 5.8.** Wir schreiben  $\varphi_{\text{Formel}}(i)$  als  $\exists h(\psi(h) \wedge h(i) = 1)$ . Dann ist  $\varphi_{\text{Formel}}^*(i)$  die Formel  $\forall h(\psi(h) \rightarrow h(i) = 1)$ . Wir haben:  $\varphi_{\text{Formel}}$  ist  $\Sigma_1$  und  $\varphi_{\text{Formel}}^* \in \Pi_1$  und  $\text{BS} \vdash \varphi_{\text{Formel}} \leftrightarrow \varphi_{\text{Formel}}^*$ .  $\varphi_{\text{Formel}}$  hat also eine  $\Delta_1^{\text{BS}}$ -Definition.

Wir erwähnen eine für Anwendungen nützliche Folge des Ersetzungsaxiomes und des Satzes über die von Neumann'sche Hierarchie:

**Satz 5.9.** ZF. Das Kollektionsprinzip. Wenn  $\varphi(x, y)$  eine Relation definiert und  $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ , dann gibt es für jedes  $a$  ein  $b$ , so dass  $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y)$ . In Symbolen

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \forall a \exists b \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x, y).$$

Hierbei sollen die Variablen  $a$  und  $b$  nicht als freie Variablen in  $\varphi$  vorkommen.

Beweis: Angenommen,  $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ . Wir definieren  $f(x) = \min\{\alpha \mid \exists y \in V_\alpha \varphi(x, y)\}$ . Nach dem Ersetzungsschema und dem Satz von von Neumann gibt es eine Ordinalzahl  $\beta$ , so dass für alle  $x \in a$   $f(x) < \beta$ . Also  $\forall x \in a \exists y \in V_\beta \varphi(x, y)$ , wie gewünscht.  $\square$

Nun möchten wir eine Formel konstruieren, die die folgenden Relation ausdrückt

$$(x, \in) \models \varphi(f(0), \dots, f(n))$$

für Formeln  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  mit Code  $i$  und  $f: i \rightarrow x$ , die die Belegungen beschreiben. In einer Formel mit Code  $i$  kommen höchstens die Variablen  $v_0, \dots, v_{i-1}$  vor, und  $f(i)$  steht für die Belegung  $s(v_i)$ . Für jedes  $x$  sei  $\text{Seq}(x)$  die Menge der endlichen Folgen von Elementen aus  $x$ .

**Definition 5.10.** Wir definieren „ $(x, \in)$  erfüllt die Formel Nummer  $i$  zusammen mit der Belegung  $f$ “:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{erf}}(i, x, f) &\leftrightarrow \varphi_{\text{Formel}}(i) \wedge f: i \rightarrow x \wedge \exists g: i + 1 \times {}^i x \rightarrow 2[\forall j \leq i, \forall s \in {}^i x \\ &(g(j, s) = 1 \rightarrow (\varphi_{\text{Formel}}(j) \wedge \forall k, \ell < j \\ &((j = \langle 0, k, \ell \rangle \wedge s(k) \in s(\ell)) \vee \\ &(j = \langle 1, k, \ell \rangle \wedge s(k) = s(\ell))) \vee \\ &(j = \langle 2, k, \ell \rangle \wedge g(k, s) = 1 \wedge g(\ell, s) = 1)) \vee \\ &(j = \langle 3, k \rangle \wedge g(k, s) = 0)) \vee \\ &(j = \langle 4, k, \ell \rangle \wedge \forall s'(\forall m(m \neq k \rightarrow s'(m) = s(m)) \rightarrow g(\ell, s') = 1))] \\ &\wedge g(i, f) = 1] \end{aligned}$$

**Beobachtung 5.11.** Wir schreiben  $\varphi_{\text{erf}}(i, x, f)$  als  $\varphi_{\text{Formel}}(i) \wedge f: i \rightarrow x \wedge \exists g(\psi(g) \wedge g(i, f) = 1)$ . Dann setzen wir

$$\varphi_{\text{erf}}^*(i, x, f) = \varphi_{\text{Formel}}(i) \wedge f: i \rightarrow x \wedge \forall g(\psi(g) \rightarrow g(i, f) = 1).$$

$\varphi_{\text{erf}}$  ist in  $\Sigma_1$  und  $\varphi_{\text{erf}}^* \in \Pi_1$  und  $\text{BS} \vdash \varphi_{\text{erf}} \leftrightarrow \varphi_{\text{erf}}^*$ , und in der Tat wird für die Herleitung der Äquivalenz wieder nur "basic set theory" benutzt.

Exkurs: Wir können obige Herleitungen auch für  $(\mathbf{V}, \in)$  anstelle von  $(x, \in)$  ausnützen und erhalten:

**Satz 5.12.** Definierbarkeit der  $\Sigma_n$ -Erfüllung. Für jedes  $n$  gibt es eine Formel  $\Phi_{\text{erf}}^n(i, s)$ , so dass folgendes gilt: Wenn  $i = \ulcorner \varphi \urcorner$  und  $\varphi$  eine  $\Sigma_n$ -Formel und  $s$  eine Funktion auf  $i + 1$  sind, gilt:

$$\text{ZF}^- \vdash \Phi_{\text{erf}}^n(i, s) \leftrightarrow \varphi(s(0), \dots, s(i)).$$

Beweis: Sei zunächst  $n = 1$ . Wir definieren  $\Phi_{\text{erf}}^1(i, s)$  als

$$\exists T(T \text{ transitiv} \wedge s: i + 1 \rightarrow T \wedge \varphi_{\text{erf}}(i, T, s)).$$

Wenn  $(T, \in) \models \varphi(s(0), \dots, s(i))$  und  $\varphi$  eine  $\Sigma_1$ -Formel ist, dann ist  $\varphi(s(0), \dots, s(n))$  wahr in  $V$  wegen der Transitivität von  $T$ . Umgekehrt, wenn  $\varphi(s(0), \dots, s(n))$  wahr ist, dann gibt es, da es sich um eine  $\Sigma_1$ -Formel handelt, ein  $V_\alpha$  mit einem Existenzbeispiel. Und  $V_\alpha$  ist transitiv, kann also als ein  $T$  mit  $(T, \in) \models \varphi(s(0), \dots, s(i))$  dienen, das nun  $\Phi_{\text{erf}}^1(i, s)$  bezeugt.

Der allgemeine Fall folgt nun durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke (die ja in  $i$  kodiert sind).  $\Phi_{\text{erf}}^2(i, s)$  wird für  $i = \ulcorner \exists w_0 \dots \exists w_j \neg \varphi(v_0, \dots, v_i, w_0, \dots, w_j) \urcorner$  und  $\varphi \in \Sigma_1$ , dann  $i' = \ulcorner \varphi(v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+j+1}) \urcorner$  und

$$\Phi_{\text{erf}}^2(i, s) = \exists t \neg \Phi_{\text{erf}}^1(i', s * t).$$

□

Der Satz gilt stufenweise für jedes  $n$ , und es können nicht alle  $n$  zusammen in einem Satz beschrieben werden, wie folgender Satz zeigt:

**Satz 5.13.** Tarski. Es gibt keine Formel  $\Phi_{\text{erf}}(i)$ , so dass für jeden Satz  $\varphi$  gilt

$$\text{BS} \vdash \Phi_{\text{erf}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi.$$

Beweis: Andernfalls betrachte man die Formel  $\varphi(i, j) = \neg \Phi_{\text{erf}}(\ulcorner \varphi_i(j) \urcorner)$  mit der Indizierung  $\varphi_i$ , so dass  $\ulcorner \varphi_i(v_0) \urcorner = i$ , wenn  $i$  Gödelnummer einer Formel ist, sonst setze  $\varphi(i, j) = \neg \Phi_{\text{erf}}(0)$ . Sei nun  $i_0 = \ulcorner \varphi(v_0, v_0) \urcorner$  und  $\psi = \varphi(i_0, i_0)$ . Dann haben wir

$$\text{BS} \vdash \Phi_{\text{erf}}(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \varphi(i_0, i_0) \leftrightarrow \neg \Phi_{\text{erf}}(\ulcorner \varphi_{i_0}(i_0) \urcorner) \leftrightarrow \neg \Phi_{\text{erf}}(\ulcorner \varphi(i_0, i_0) \urcorner) \leftrightarrow \neg \Phi_{\text{erf}}(\ulcorner \psi \urcorner).$$

Widerspruch.

Dasselbe Argument kann auf jede rekursive Theorie, die BS umfasst, angewendet werden. □

Die Definierbarkeit der  $\Sigma_n$  Erfüllung führt nun zu Reflexionsprinzipien.

**Definition 5.14.**  $M \prec_n \mathbf{V}$  und in Worten „ $M$  ist ein  $\Sigma_n$ -elementares Submodell“ von  $\mathbf{V}$  gdw für jede  $\Sigma_n$ -Formel  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  und alle  $a_0, \dots, a_n \in M$

$$M \models \varphi(a_0, \dots, a_n) \leftrightarrow \mathbf{V} \models \varphi(a_0, \dots, a_n).$$

**Satz 5.15.** *Der Reflexionssatz ([15, Exercise 14.11]).* ZF. Für jedes  $n$  gilt:

$$\text{ZF} \vdash \forall \alpha \exists \beta \geq \alpha V_\beta \prec_n \mathbf{V}.$$

Beweis. Für  $n = 0$  ist die Behauptung klar, da  $\Sigma_0$ -Formeln absolut sind: Jedes  $V_\alpha$  ist transitiv, und daher  $V_\alpha \prec_0 \mathbf{V}$ . Angenommen, die Behauptung gelte für  $n$  und  $\alpha$  sei eine Ordinalzahl. Wir möchten ein  $\beta > \alpha$  finden, so dass  $V_\beta \prec_{n+1} \mathbf{V}$ . Nach IV. können wir zu jedem  $\alpha'$  ein  $\beta \geq \alpha'$  wählen, so dass  $V_\beta \prec_n \mathbf{V}$ .

Nach der Definierbarkeit der  $\Sigma_n$ -Erfüllung und nach dem Ersetzungsschema können wir nun  $\alpha \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots$  definieren, so dass gilt:

- (a)  $\langle \varphi_k \mid k \in \omega \rangle$  zählt alle  $\Pi_n$ -Formeln auf, so dass jede Formel unendlich oft vorkommt. Diese Aufzählung sei rekursiv, also wieder durch eine einzige Formel beschreibbar.
- (b) Wenn  $\exists \vec{y} \varphi_k(\vec{a}, \vec{y})$  und  $\vec{a} \in V_{\beta_k}$ , dann  $\exists \vec{y} \in V_{\beta_{k+1}} \varphi_k(\vec{a}, \vec{y})$  und  $V_{\beta_{k+1}} \prec_n \mathbf{V}$ .

Man mache sich klar, dass durch diese Beschreibung wirklich eine durch eine Formel gegebene Operation (in (b) nehme man das minimale  $\beta_{k+1}$ ) von  $V_\beta \times \omega$  in die Ordinalzahlen definiert wird. Diese Formel hängt stark von  $n$  ab. Die Bildmenge  $\{\beta_k \mid k \in \omega\}$  ist also eine Menge! Sei nun  $\beta$  das Supremum der  $\beta_k$ , dann ist  $V_\beta \prec_{n+1} \mathbf{V}$ .  $\square$

Bemerkung: Will man von  $\beta_k$  to  $\beta_{k+1}$  aufsteigen, indem man auch  $\prec_n$  mit  $k$  erhöhen möchte zu  $\prec_k$ , dann funktioniert der Beweis nicht mehr, nach dem Satz von Tarski. Es gibt keine uniforme Beschreibung von  $\prec_k$  gleichzeitig für alle  $k$ .

Nun beenden wir den Exkurs, der zur Bereitstellung von Ausgangsmodellen für Forcingkonstruktionen sehr wichtig sein wird, und kehren zur Untersuchung der Eigenschaften von  $\mathbf{L}$  zurück.

### 5.3 Präzisierung der Operation $\text{Def}(x, y)$ und Absolutheit

**Definition 5.16.** Wir definieren die Formel „ $y$  ist die Menge der definierbaren Teilmengen von  $x$ “ wie folgt:

$$\text{Def}(x, y) \leftrightarrow \forall z \in y \exists i \in \omega \exists s \in {}^i x \forall w \in x (w \in z \leftrightarrow \varphi_{\text{erf}}(i, x, \langle w \rangle * s)) \wedge \forall i \forall s \in {}^i x \exists z \in y \forall w \in x (w \in z \leftrightarrow \varphi_{\text{erf}}(i, x, \langle w \rangle * s)) \wedge y \subseteq \mathcal{P}(x),$$

hierbei haben wir die Konkatenation benutzt:  $(\langle w \rangle * s)(i) = w$  für  $i = 0$  und  $s(i - 1)$  sonst.

Wir formen  $\forall x \in y \exists z \varphi(x, y, z, w)$  um: Nach Satz 5.9 gibt es zu jedem  $x \in y$  ein  $u(x) \in \mathbf{V}$  und auch insgesamt eine Funktion  $u: y \rightarrow \mathbf{V}$ , so dass dies äquivalent ist zu  $\exists u \forall x \in y \exists z \in u(x) \varphi(x, y, z, w)$ . Nun ist  $u(x)$  noch kein schöner Formelbestandteil. Äquivalent ist auch:  $\exists u \forall x \in y \exists z_1 \in u \exists z_2 \in u (z_1 = (x, z_2) \wedge \exists z \in z_2 \varphi(x, y, z, w))$ .

**Definition 5.17.** Ein Fragment ist eine endliche Teilmenge von ZFC.

**Beobachtung 5.18.** Es gibt  $\Sigma_1$ - bzw  $\Pi_1$ -Formeln  $\varphi$  und  $\psi$ , so dass für ein geeignetes Fragment  $F$  gilt:  $F \vdash \text{Def}(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, y)$ . Dies ist der Fall, da aufgrund des aus ZF beweisbaren Kollektionsprinzips 5.9 für jede  $\Sigma_1$ -Formel  $\varphi$  auch die Formel  $\forall x \in y \varphi$  äquivalent zu einer  $\Sigma_1$ -Formel ist. Deshalb haben wir sowohl eine  $\Sigma_1$  als auch eine  $\Pi_1$ -Definition für  $\text{Def}(x) = y$ .  $F$  soll von nun an also den endlichen Teil von ZF enthalten, der zu diesem letztgenannten Beweis für die in  $\text{Def}(x, y)$  beteiligten Formeln gebraucht wird. Dies sind nur endlich viele Instanzen des Kollektionsprinzips 5.9.

**Definition 5.19.** Sei  $F$  eine Teilmenge von ZFC. In diesen Definition muss  $F$  nicht unbedingt endlich sein.

- (1) Eine Formel  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  heißt absolut (genauer: absolut für transitive  $F$ -Modelle) gdw für alle transitiven  $F$ -Modelle  $M \subseteq N$  und  $x, \dots, x_n \in M$  gilt:

$$M \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ gdw } N \models \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

- (2) Eine Formel  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  ist  $\Delta_1^F$  in  $F$ , geschrieben  $\Delta_1^F$  gdw es  $\Sigma_1$  und  $\Pi_1$  Formeln  $\psi$  und  $\chi$  gibt, so dass

$$F \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi.$$

**Proposition 5.20.** Jede  $\Delta_1^F$ -Formel ist absolut für transitive  $F$ -Modelle.

Beweis: Sei  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Delta_1^F$ -Formel. Wir wählen  $\Sigma_1$ - und  $\Pi_1$ -Formeln, die dies bezeugen:  $F \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \leftrightarrow \chi$ . Wenn  $M \subseteq N$  transitive  $ZF^-$ -Modelle sind und  $x_1, \dots, x_n \in M$ , dann impliziert  $M \models \psi(x_1, \dots, x_n) \implies N \models \psi(x_1, \dots, x_n)$ , da  $\psi$   $\Sigma_1$  ist. Außerdem impliziert  $N \models \chi(x_1, \dots, x_n) \implies M \models \chi(x_1, \dots, x_n)$ , da  $\chi$   $\Pi_1$  ist. Da in beiden Modellen  $\varphi$  äquivalent zu  $\psi$  und zu  $\chi$  ist, gelten also beide Implikationen auch für  $\varphi$ .  $\square$

Die folgenden Formeln sind absolut:  $x \in y$ ,  $x = y$ ,  $x \subseteq y$ ,  $x$  ist transitiv,  $y = \bigcup x$  und  $w = y \times z$ , denn diese sind  $\Delta_0$ .

**Lemma 5.21.** Die Eigenschaft „ $(x, \leq)$  ist eine Wohlordnung“ ist absolut:

Beweis: Mit dem Rekursionssatz, der Instanzen des Ersetzungsaxioms benutzt, zeigt man:  $(x, \leq)$  ist eine Wohlordnung gdw

$$\exists f: (x, <) \cong (\alpha, \in) \text{ für eine Ordinalzahl } \alpha,$$

$$\text{gdw } \neg \exists y \subseteq x (y \neq \emptyset \wedge y \text{ hat kein } \leq\text{-minimales Element),}$$

und so ist diese Eigenschaft  $\Delta_1^F$  für ein geeignetes endliches Fragment.  $\square$

Wir möchten jetzt zeigen, dass die Definition der  $\mathbf{L}$ -Hierarchie absolut ist. Dies folgt aus dem folgenden allgemeinen Resultat: Eine partielle Ordnung ist eine Struktur  $(X, \leq)$  mit einem reflexiven, antisymmetrischen und transitiven

$\leq$ . Sie ist fundiert gdw wenn jedes nicht leere  $Y \subseteq X$  ein  $\leq$ -minimales Element enthält.

$\Sigma_1^F$ -definierbare *Funktionen* sind schon  $\Delta_1^F$ -definierbar, da auch  $f(x) \neq y$   $\Sigma_1^{ZF^-}$ -definierbar ist durch  $\exists z(z \neq y \wedge f(x) = z)$ . Deshalb kann man im folgenden Satz die Voraussetzung über die Definierbarkeit von  $g$  scheinbar abschwächen zu „ $g$  ist definierbar durch eine  $\Sigma_1^F$ -Formel.“

**Satz 5.22.**  $\Delta_1$ -Induktionsprinzip oder  $\Delta_1$ -Rekursionssatz. Angenommen,  $(X, \leq)$  ist eine fundierte partielle Ordnung  $g$  ist eine totale Funktion und  $\{y \mid y \leq x\}$  ist eine Menge für jedes  $x \in X$ . Wir nehmen an, dass  $(X, \leq)$  und die Funktion  $x \mapsto \{y \mid y \leq x\}$  und die Funktionen  $g$  definierbar durch  $\Delta_1^F$ -Formeln sind und dass für diese Formel das Kollektionsprinzip in  $F$  beweisbar ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion  $f$  auf  $X$ , so dass  $f$   $\Delta_1^F$ -definierbar ist und für jedes  $x \in X$  gilt

$$f(x) = g(f \upharpoonright \{y \mid y < x\}).$$

Beweis: Wir zeigen, dass es für jedes  $x$  eine eindeutig bestimmte Funktion  $f_x$  auf  $\{y \mid y \leq x\}$ , so dass  $f_x(y) = g(f_x \upharpoonright \{z \mid z < y\})$  für  $y \leq x$  gibt. Wenn nicht, dann gibt es ein  $\leq$ -minimales  $x \in X$ , für das dies scheitert. Wie bekommen dann wie folgt einen Widerspruch: Annahme  $x$  sei minimal, so dass es zwei verschiedene  $f_x^i$  gäbe. Wir nehmen  $y \leq x$  minimal, so dass  $f_x^1(y) \neq f_x^2(y)$ . Dann ist  $f_x^i(z) = f_y^i(y)$  für jedes  $z < y$  und daher  $f_x^1(y) = g(\bigcup \{f_x^1 \mid z < y\}) = g(f_x \upharpoonright \{z \mid z < y\}) = f_x^2(y)$ . Widerspruch. Zur Existenz: Sei  $f_x: \{y \mid y \leq x\} \rightarrow \mathbf{V}$  schon definiert für alle  $x < z$  und wir wollen  $f_z$  definieren. Wir nehmen  $f_z(u) = f_u(u)$  für  $u < z$  und  $f_z(z) = g(\{(x, f_x(x)) \mid x < z\})$ . Dies ist die eindeutig bestimmte Funktion auf  $X$ , so dass für jedes  $x \in X$ ,  $f(x) = g(f \upharpoonright \{y \mid y < x\})$ . Und  $f$  ist  $\Delta_1$  in  $F$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= w \text{ gdw} \\ \exists h(\forall y \leq x h(y) &= g(h \upharpoonright \{z \mid z < y\}) \wedge h(x) = w) \text{ gdw} \\ \exists h \exists u(u = \{y \mid y \leq x\} \wedge \forall y \in u h(y) &= g(h \upharpoonright \{z \mid z < y\}) \wedge h(x) = w) \text{ gdw} \\ \forall h \forall u((u = \{y \mid y \leq x\} \wedge \forall y \in u h(y) &= g(h \upharpoonright \{z \mid z < y\})) \rightarrow h(x) = w) \text{ gdw} \\ \forall h(\forall y \leq x h(y) &= g(h \upharpoonright \{z \mid z < y\}) \rightarrow h(x) = w). \end{aligned}$$

□

**Korollar 5.23.** Für ein geeignetes endliches Fragment, das das Fundierungsaxiom enthält, gilt: Die folgenden Ausdrücke sind  $\Delta_1^F$  und sind absolut:  $\text{rk}(x) = \alpha$ ,  $\alpha + \beta = \gamma$ ,  $\alpha \cdot \beta = \gamma$  und  $y = L_\alpha$ .

## 5.4 Das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese in $\mathbf{L}$

Wir wiederholen die Definition der  $\mathbf{L}$ -Hierarchie.

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= \text{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha, \\ \mathbf{L} &= \bigcup_{\alpha \in \text{On}} L_\alpha. \end{aligned}$$

$x$  ist konstruktibel gdw  $x \in L_\alpha$  für eine Ordinalzahl  $\alpha$ . Dies wird durch „ $x \in \mathbf{L}$ “ abgekürzt.  $\mathbf{L}$  ist keine Menge, sondern eine echte Klasse. Unsere Untersuchungen der Absolutheit zeigt, dass die Funktion  $\alpha \mapsto L_\alpha$  absolut ist: Wenn  $M$  und  $N$  transitive  $\text{ZF}^-$ -Modelle sind, dann sind  $L_\alpha^M = L_\alpha^N$ .

Wir zeigen nun, dass  $\mathbf{L}$  in einem gewissen Sinne ein Modell von  $\text{ZF}$  ist: Wenn  $\mathbf{V}$  ein Modell von  $\text{ZF}$  ist, dann ist  $\mathbf{L}^{\mathbf{V}} = \mathbf{L}$  ein Modell von  $\text{ZF}$ .

**Definition 5.24.** Für jede Formel  $\varphi$  definieren wir  $\varphi^M$ , die Relativierung von  $\varphi$  auf eine Klasse oder eine Menge  $M$ , wie folgt:

$$\begin{aligned} (x \in y)^M &= (x \in y) \\ (x = y)^M &= (x = y) \\ (\varphi \wedge \psi)^M &= (\varphi^M \wedge \psi^M) \\ (\neg \varphi)^M &= \neg \varphi^M \\ (\forall x \varphi)^M &= \forall x (x \in M \rightarrow \varphi^M). \end{aligned}$$

Dann drückt  $\varphi^M$  die Eigenschaft „ $\varphi$  ist wahr in  $M$ “ aus. Wir haben

**Satz 5.25.**  $\text{ZF} \vdash \varphi^{\mathbf{L}}$  für jedes Axiom  $\varphi$  in  $\text{ZF}$ .

Beweis:  $\varphi^{\mathbf{L}}$  ist einfach zu überprüfen, wenn  $\varphi$  ein Axiom von  $\text{ZF}$  außer dem Potenzmengenaxiom oder dem Ersetzungsschema ist.

Potenzmengenaxiom: Sei  $x \in L_\alpha$  und wir definieren  $\mathcal{P}^{\mathbf{L}}(x)$  als  $\{y \in \mathbf{L} \mid y \subseteq x\}$ . Wie müssen zeigen, dass  $\mathcal{P}^{\mathbf{L}}(x)$  Element von  $L_\beta$  für ein  $\beta$  ist. Definiere die Funktion  $f: \mathcal{P}(x) \rightarrow \text{On}$  wie folgt

$$f(y) = \begin{cases} \min\{\gamma \mid y \in L_\gamma\} & \text{falls } y \in \mathbf{L} \\ 0 & \text{falls } y \notin \mathbf{L} \end{cases}$$

Nach dem Ersetzungsschema gibt es eine Ordinalzahl  $\beta$ , so dass  $\text{rge}(f) \subseteq \beta$  und daher  $\mathcal{P}^{\mathbf{L}}(x) \subseteq L_\beta$  und deshalb  $\mathcal{P}^{\mathbf{L}}(x) \in \text{Def}(L_\beta) = L_{\beta+1}$ .

Ersetzungsschema: Sei  $x \in L$  und  $f: x \rightarrow L$  eine  $\mathbf{L}$ -definierbare Funktion. Wir müssen zeigen, dass es eine Ordinalzahl  $\alpha$  gibt, so dass  $\text{rge}(f) \in L_\alpha$ , wenn  $g \Sigma_n$ -definierbar in  $\mathbf{L}$  ist. Dann genügt es eine Ordinalzahl  $\alpha$  zu finden, so dass  $L_\alpha \prec_n \mathbf{L}$ ,  $\text{rge}(f) \subseteq L_\alpha$  und die Parameter in der Formel, die  $f$  definiert, Elemente von  $L_\alpha$  sind. Wir nehmen  $m \geq n$  so dass  $y = L_\alpha$  eine  $\Delta_1^F$ -Formel ist für

ein  $F$ , das nur  $\Sigma_n$ -Formeln hat. Man prüft, dass  $\varphi^{\mathbf{L}}$  und  $\varphi$  denselben Levy-Rang haben. Nach dem Reflexionsprinzip können gibt es  $\alpha$  so dass  $V_\alpha \prec_m \mathbf{V}$ . Daraus erhalten wir mit  $\mathbf{V} \models \varphi^{\mathbf{L}}$  gdw  $\mathbf{L} \models \varphi$  und selbem für  $V_\alpha$  dann  $\mathbf{L}^{V_\alpha} \prec_n \mathbf{L}$ . Nun ist  $\mathbf{L}^{V_\alpha} = \{x \in V_\alpha \mid V_\alpha \models x \in \mathbf{L}\} = V_\alpha \cap \mathbf{L} = L_\alpha$ .  $\square$

**Korollar 5.26.** *Sei  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$  der Satz  $\forall x(x \in \mathbf{L})$ . Wenn ZF konsistent, dann auch  $\text{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ .*

Beweis: Angenommen,  $\text{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$  sei inkonsistent. Dann  $\text{ZF} \vdash \neg \mathbf{V} = \mathbf{L}$ , da ZF konsistent ist. Nach dem Satz, dass  $\text{ZF} \vdash \varphi^{\mathbf{L}}$  für jedes Axiom  $\varphi$  beweist die Relativierung des Beweises von  $\text{ZF} \vdash \neg \mathbf{V} = \mathbf{L}$  auf  $\mathbf{L}$ , dass  $\text{ZF} \vdash \neg(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ . Wir haben aber

$$(\neg(\mathbf{V} = \mathbf{L}))^{\mathbf{L}} = \neg(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}} = \neg(\forall x(x \in \mathbf{L}))^{\mathbf{L}} = \neg\forall x(x \in \mathbf{L} \rightarrow x \in \mathbf{L}^{\mathbf{L}}).$$

was wegen  $\mathbf{L}^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$  die Negation eines gültigen Satzes ist. Widerspruch.  $\square$

Nun zeigen wir ein wichtiges Ergebnis. Die Hinzunahme des Auswahlaxioms ändert die Konsistenz nicht:

**Satz 5.27.** *(Gödel, 1938) Wenn ZF konsistent ist, dann auch ZFC.*

Beweis: Da  $\text{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$  relativ konsistent zu ZF ist, folgt der Gödel'sche Satz aus

**Satz 5.28.**  $\text{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \text{AC}$

Beweis: Es genügt, zu zeigen, dass es für jedes  $\alpha$  eine  $\Delta_1$ -Wohlordnung  $(L_\alpha, <_\alpha)$  mit  $<_\alpha$  in  $\mathbf{L}$  gibt. Wir benützen wieder den Satz von der  $\Delta_1$ -Definition durch Rekursion. Wir definieren  $<_\alpha$  wie folgt

$$\begin{aligned} <_0 &= \emptyset \\ <_\lambda &= \bigcup \{<_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \text{ für Limes } \lambda \\ < &= \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} <_\alpha. \end{aligned}$$

Sei  $\omega^{>}x = \bigcup^n x$ . Für Nachfolgerordinalzahlen  $\alpha = \beta + 1$  betrachten wir zunächst die folgende Ordnung auf  $\omega \times \omega^{>}(L_\beta)$ :

$$\langle i, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle \prec_{\text{lex}} \langle j, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \rangle$$

gdw  $(i < j)$  oder  $(i = j \wedge n < m)$  oder  $(i = j \wedge n = m \wedge \exists k \leq n \forall i < k (a_i = b_i \wedge a_k <_\beta b_k))$

Für  $x \in L_\beta$  sei  $\text{Code}(x)$  das  $\prec_{\text{lex}}$ -kleinste  $\langle i, \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$ , so dass  $x = \{z \in L_\beta \mid L_\beta \models \varphi_i(z, a_1, \dots, a_n)\}$ , wobei  $\varphi_i$  die Formel mit Gödelnummer  $i$  ist und  $\varphi$   $n + 1$  freie Variablen hat. Nun definieren wir

$$x <_{\beta+1} y$$

gdw

$$(x <_\beta y) \text{ oder } (x \in L_\beta \text{ und } y \notin L_\beta) \text{ oder } (x, y \notin L_\beta \wedge \text{Code}(x) \prec_{\text{lex}} \text{Code}(y)).$$

Nach der  $\Delta_0$ -Definierbarkeit von  $\varphi_{\text{erf}}(i, L_\beta, (z, a_1, \dots, a_n))$  ist die Funktion  $x \mapsto \text{Code}(x)$   $\Delta_1$ -definierbar. Daher ist die Funktion im Schritt von  $\beta$  auf  $\beta + 1$

in der Definition von  $\langle_{\beta+1}$   $\Delta_1$ -definierbar nach dem  $\Delta_1$ -Rekursionsatz 5.22.  $\langle$  ist  $(\Delta_1)^F$ -definierbar, und für alle  $\beta$  ist  $\langle_\beta \in L_{\beta+\omega}$ .  $\langle_\beta$  ist sowohl in  $\mathbf{V}$  als auch in  $\mathbf{L}$  eine Wohlordnung auf  $L_\beta$ .  $\square$

Nun folgt die relative Konsistenz der allgemeinen Kontinuumshypothese.

**Satz 5.29.** (Gödel, 1938)  $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \mathbf{GCH}$

Beweis: (auf der Basis der beiden folgenden Lemmata) Gegeben die beiden Lemmata haben wir  $2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)| \leq |L_{\kappa^+}| = \kappa^+$ , also den Satz von Gödel über die Konsistenz der allgemeinen Kontinuumshypothese.

Es genügt zu zeigen

**Lemma 5.30.** Für unendliche Ordinalzahlen  $\alpha$  ist  $|L_\alpha| = |\alpha|$ .

Beweis des ersten Lemmas durch Induktion über  $\alpha$ .  $|L_\omega| = \omega$ , da  $L_n$  endlich ist für jedes endliche  $n$ . Wenn  $\alpha = \beta + 1$ , dann  $|L_\alpha| = |\text{Def}(L_\alpha)| \leq |\omega \times {}^\omega(L_\beta)|$ . Da  $\kappa^{<\omega} = \kappa$  für unendliche  $\kappa$ , folgt, dass  ${}^\omega(\kappa)$  die Kardinalität höchstens  $\kappa$  hat. Wir erhalten  $|{}^\omega(L_\beta)| = |{}^\omega(|L_\beta|)| \leq |L_\beta| = |\beta|$ . Wir schreiben  $\otimes$  für die kardinale Multiplikation. Der Nachfolgerschritt  $\alpha = \beta + 1$  ist nun für unendliche  $\beta$  wie folgt:  $|\beta + 1| = |\alpha| \leq |L_\alpha| \leq \omega \otimes |L_\beta| \leq |\beta| = |\beta + 1|$ .

Für Limeszahlen ist  $|L_\lambda| = |\bigcup\{L_\beta \mid \beta < \lambda\}| \leq |\lambda| \otimes |\lambda| = |\lambda|$ .  $\square_{5.30}$

**Lemma 5.31.** Wenn  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$  und  $\kappa$  unendliche Kardinalzahl, dann  $\mathcal{P}(L_\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ .

Beweis: Um Lemma 5.31 zu beweisen, brauchen wir zwei Sätze: Den Satz von Löwenheim und Skolem, und das Kondensationsprinzip.

Beweis des Lemmas 5.31 aus den beiden Sätzen: Angenommen  $x$  sei eine Teilmenge der unendlichen Kardinalzahl  $\kappa$ . Wir wählen ein  $\alpha \in \mathbf{On}$ ,  $\alpha \geq \kappa$ , so dass  $x \in L_\alpha$  und  $L_\alpha$  ein Modell von  $F$  ist (wieder mit einem Fragment, so dass  $x = L_\alpha$  eine  $\Delta_1^F$ -Formel ist. Man prüft leicht nach, dass für reguläre  $\alpha$ :

$$\mathbf{ZF} \vdash (V_\alpha \models F)$$

Wie im Beweis des Satzes 6.25 erhält man hieraus

$$\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash (L_\alpha \models F).$$

(Bemerkung: Es gilt für reguläre  $\alpha$  sogar  $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash (L_\alpha \models \mathbf{ZF} - \mathbf{P})$ .) Nach dem Satz von Löwenheim und Skolem 6.33 wählen wir nun  $(M, \in) \prec (L_\alpha, \in)$ , so dass  $\kappa + 1 \cup \{x\} \subseteq M$  und  $M$  die Kardinalität  $\kappa$  hat. Sei  $\pi: (M, \in) \cong (T, \in)$  für ein transitives  $T$  der Mostowskikollaps, also

$$\pi(x) = \{\pi(y) \mid y \in x \cap M\}.$$

Dann ist  $(T, \in) \cong (M, \in)$  und daher  $(T, \in) \equiv (M, \in)$ . Wir erhalten  $(T, \in) \models F \wedge \forall x \exists \gamma x \in L_\gamma$ . Nach dem Kondensationsprinzip 5.34 gibt es ein  $\beta$ , so dass  $T = L_\beta$ . Da  $T$  die Mächtigkeit  $\kappa$  hat, ist  $\beta < \kappa^+$ .  $T \subseteq \mathbf{L}$ , da wir  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$

angenommen haben. Da für alle  $t \in T$   $\text{rk}(t) \leq \text{rk}\pi_M^{-1}(t) < \alpha$  und  $\mathbf{L} \cap V_\alpha = L_\alpha$ , ist  $T \subseteq L_\alpha$ .

$x$  ist aber ein Element von  $M$  und daher ist  $\pi(x) \in L_\beta$  definiert für den Isomorphismus  $\pi: (M, \in) \rightarrow (L_\beta, \in)$ . Da  $\pi$  die Identität auf  $\kappa + 2$  ist, ist  $\pi(\kappa + 1) = \kappa + 1$ , und daher haben wir  $\pi(x) = x$ . Es folgt, dass  $x$  Element von  $L_\beta \subseteq L_{\kappa+}$  ist. □<sub>5.31</sub>

Zum ersten Satz:

**Definition 5.32.** Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$   $\tau$ -Strukturen.  $\mathfrak{B}$  ist eine elementare Substruktur von  $\mathfrak{A}$ , in Zeichen  $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$  gdw für jede Formel  $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in B$

$$\mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ gdw } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

**Satz 5.33.** *Der Satz von Löwenheim und Skolem. Angenommen,  $\mathfrak{A}$  ist eine unendliche Struktur mit Universum  $A$  in eine abzählbaren Sprache und  $x$  ist eine unendliche Teilmenge von  $A$ , dann gibt es  $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$  mit Universum  $B$ , so dass  $x \subseteq B$  und  $|B| = |x|$ .*

Beweis des Satzes von Löwenheim und Skolem: Für jede Formel  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  wählen wir eine Funktion  $f_\varphi: A^n \rightarrow A$ , so dass für alle  $a_1, \dots, a_n$  gilt:

$$\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(y, a_1, \dots, a_n) \rightarrow \varphi(f_\varphi((a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n)).$$

Dies ist nach AC möglich. Jede Funktion mit obigen Eigenschaften heißt Skolemfunktion. Nun definieren wir

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_{k+1} &= \bigcup \{ \text{rge}(f_\varphi) \upharpoonright [x_k]^n \mid \varphi \text{ wie oben} \}. \end{aligned}$$

Dann ist die Mächtigkeit von  $x_k$  höchstens  $\omega \otimes |x|$  für jedes  $k$ , und dasselbe ist wahr für die Vereinigung  $B = \bigcup_{k \in \omega} x_k$ . Wir definieren nun  $\mathfrak{B}$  als die Substruktur von  $\mathfrak{A}$  mit Universum  $B$ . Wir zeigen, dass für jede Formel  $\varphi$  und alle  $b_1, \dots, b_n$  aus  $B$  gilt:

$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \text{ gdw } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Dies wird durch Induktion über  $\varphi$  bewiesen. Der atomare Fall ist klar und die Fälle  $\varphi = \sim \psi$  und  $\psi \wedge \chi$  folgen leicht aus der Induktionsvoraussetzung. Angenommen  $\psi = \exists y \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ . Wenn  $\mathfrak{B} \models \psi$  dann  $\mathfrak{B} \models \varphi(b)$  für ein  $b \in B$ , und  $\mathfrak{A} \models \varphi(b)$  nach der Induktionsannahme, daher  $\mathfrak{A} \models \psi$ . Umgekehrt, wenn  $\mathfrak{A} \models \psi$  und  $f_\varphi(b_1, \dots, b_n) = b \in B$ , dann  $\mathfrak{B} \models \varphi(b, b_1, \dots, b_n)$  nach Induktionsannahme. Es folgt, dass  $\mathfrak{B} \models \psi$ . □<sub>5.33</sub>

**Satz 5.34.** *Kondensationsprinzip. Sei  $T \subseteq L_\alpha$  und sei  $T$  eine transitive Menge. Sei außerdem  $(T, \in) \models \mathbf{F} \wedge \forall x \exists \gamma x \in L_\gamma$  und  $\text{lim}(\alpha)$ . Dann gibt es ein  $\beta \leq \alpha$ , so dass  $(T, \in) = (L_\beta, \in)$ .*

Bemerkung: statt  $(T, \in) \models \mathbf{F} \wedge \forall x \exists \gamma x \in L_\gamma$  wird oft  $(T, \in) \prec_1 (L_\alpha \in)$  vorausgesetzt. Dies ist eine schwächere Form des Kondensationsprinzips.

Beweis: Die Formel  $x = L_\gamma$  ist nach Korollar 5.23  $\Delta_1^F$ . Wir nehmen eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\varphi(z, v, \gamma)$  so dass

$$\mathbf{F} \vdash \forall \gamma \forall v (v = L_\gamma \leftrightarrow \exists z \varphi(z, v, \gamma)) \quad (\text{a})$$

Außerdem nehmen wir eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\psi$ , so dass

$$\mathbf{F} \vdash \forall \gamma \forall v (v = L_\gamma \leftrightarrow \forall z \psi(z, v, \gamma)) \quad (\text{b})$$

Sei  $\ulcorner \varphi \urcorner = i$  und  $\ulcorner \psi \urcorner = j$ . Sei nun  $\gamma < \alpha$ .  $L_\alpha$  ist transitiv. Daher haben wir

$$\forall \gamma < \alpha \forall v (v = L_\gamma \leftrightarrow (v \in L_\alpha \wedge L_\alpha \models \exists z \Phi^0(i, z, v, \gamma))) \quad (\text{b})$$

Nun ist  $T \subseteq L_\alpha$  transitiv, daher  $T \models \mathbf{On}(\gamma) \wedge \gamma < \alpha$ . Ausserdem folgt aus (b)

$$\forall \gamma < \alpha L_\alpha \models \exists v \exists z \Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma). \quad (\text{c})$$

Wir halten ein  $\gamma \in T$  fest.  $\gamma < \alpha$ , da  $T \subseteq L_\alpha$ .

Dann ist wegen  $T \models \mathbf{F} \wedge \forall w \exists \delta w \in L_\delta$ :

$$T \models \exists v \exists z \Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma) \quad (\text{e})$$

Da  $T$  transitiv ist, gilt

$$\forall \gamma \in T \exists v \in T \exists z \in T \Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma) \quad (\text{f})$$

Also ist

$$\forall \gamma \in T L_\gamma \in T. \quad (\text{g})$$

Da  $T$  transitiv ist, ist  $T \cap \mathbf{On} = \beta$  für eine Ordinalzahl  $\beta$ . Daher ist

$$\forall \gamma < \beta L_\gamma \in T. \quad (\text{h})$$

Da  $T$  transitiv ist, ist auch

$$\bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma \subseteq T. \quad (\text{i})$$

Also haben wir  $L_\beta \subseteq T$  für ein  $\beta \leq \alpha$ .

Wir zeigen nun, dass  $L_\beta = T$ . Aus  $\lim(\alpha)$  erhalten wir  $L_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma$ :

$$\forall x \in L_\alpha L_\alpha \models \exists \gamma \exists v \exists z (\Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma) \wedge x \in v) \quad (\text{j})$$

und wir transportieren nach  $T$

$$\forall x \in TT \models \exists \gamma \exists v \exists z \Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma) \wedge x \in v \quad (\text{k})$$

ziehen die Quantoren aus der  $\models$ -Relation heraus und erhalten Also

$$\forall x \in T \exists \gamma \in T \exists v \in T \exists z \in TT \models \Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma) \wedge x \in v \quad (\text{l})$$

Da  $T$  transitiv ist, ist

$$\forall x \in T \exists \gamma \in T \exists v \in T \exists z \in T (\Phi_{\text{erf}}^0(i, z, v, \gamma) \wedge x \in v) \quad (\text{m})$$

Nach der Wahl von  $\varphi$  ist daher

$$\forall x \in T \exists \gamma \in T x \in L_\gamma. \quad (\text{o})$$

Nach der Wahl von  $\beta$  ist daher

$$\forall x \in T \exists \gamma \in \beta x \in L_\gamma \quad (\text{p})$$

$$T \subseteq \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma \subseteq L_\beta. \quad (\text{q})$$

□<sub>5.34</sub>

Somit ist nun auch der Satz über die allgemeine Kontinuumshypothese in  $\mathbf{L}$  gezeigt.

**Ad libitum** Für  $\mathbf{L}$  sind die Lévy-Hierarchie und die sogenannte projektive Hierarchie miteinander ein bisschen verwandt. Dieser Abschnitt ist für Leserinnen und Leser, die schon mehr deskriptive Mengenlehre kennen.

Eine Formel  $\exists f \in {}^\omega \omega \forall g \in {}^\omega \omega \varphi(f, g, h)$  heißt  $\Sigma_2^1$  (in der projektiven Hierarchie). Die hochgestellte 1 zeigt an, dass über  ${}^\omega \omega$  quantifiziert wird, nicht über  $\omega$ , was einer hochgestellten 0 entspricht in der projektiven Hierarchie. Die untere 2 steht wie gehabt für zwei Blöcke.

**Satz 5.35.** Gödel.  $\mathbb{R}^L$  ist  $\Sigma_2^1$ . Die Wohlordnung  $<_L$  ist eine  $\Sigma_2^1$  Relation über  $\mathbb{R}^L$ .

**Lemma 5.36.** [15, Lemma 41.1] Wenn  $A \subseteq {}^\omega \omega$   $\Sigma_1$  über  $HC = (H(\aleph_1), \in)$  ist, dann ist  $A$  eine  $\Sigma_2^1$ -Menge in  ${}^\omega \omega$ .

Beweis: Wenn  $A$   $\Sigma_1$  über  $HC$  ist, dann gibt es eine  $\Sigma_0$ -Formel  $\varphi$ , so dass

$$x \in A \leftrightarrow HC \models \exists u \varphi(u, x) \leftrightarrow (\exists u \in HC)(HC \models \varphi[u, x]).$$

Da  $\varphi$   $\Sigma_0$  und somit absolut für transitive Modelle ist, haben wir

$$x \in A \leftrightarrow (\exists M \in HC)(\exists u \in M)(M \text{ ist transitiv und } M \models \varphi[u, x]).$$

(Z.B.:  $M = \text{th}(\{u, x\})$ .) Nach dem Auswahlaxiom oder auch nur nach dem principle of dependent choices ist jedes  $M \in HC$  abzählbar, und wir haben daher

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow \exists M \exists u \in M (M \models \varphi[u, x] \text{ und } M \text{ ist transitiv und abzählbar}) \\ &\leftrightarrow \exists E \subseteq {}^\omega \omega \exists n \exists m (\pi_E(m) = x \\ &\quad \wedge (\omega, E) \models \varphi[n, m] \wedge E \text{ ist eine fundierte Relation}) \end{aligned}$$

mit dem transitiven Kollaps  $\pi_E: (\omega, E) \cong (M, \in)$ .

Wir nehmen die Kodierung  $E_z$  für  $z \in \omega^\omega$ :

$$xE_zy \leftrightarrow z(\langle x, y \rangle) = 1.$$

Sei WF die Menge der Codes für abzählbare Wohlordnungen. Dann

$$x \in A \leftrightarrow \exists z \in \omega^\omega (z \in \text{WF und } (\omega, E_z) \models \text{Extensionalität und} \\ \exists n \exists m (\pi_{E_z}(m) = x \wedge (\omega, E_z) \models \varphi[n, m])).$$

Wir verifizieren, dass dieses eine  $\Sigma_2^1$ -Definition von  $A$  gibt. Da WF  $\Pi_1^1$  ist, reicht es zu zeigen, dass die Relationen  $(\omega, E_z) \models \varphi[n_1, \dots, n_m]$  und  $\pi_E(x) = m$  arithmetisch in  $E$  sind. Der Mostowki-Kollaps ist arithmetisch, denn

$$\pi_E(m) = k \leftrightarrow \exists \langle r_0, \dots, r_k \rangle, \text{ so dass} \\ m = r_k \wedge (\omega, E) \models r_0 = \emptyset \wedge \forall i < k (\omega, E) \models r_{i+1} = r_i \cup \{r_i\}.$$

Dann haben wir für  $x \subseteq \omega$ ,  $\pi_E(m) = x \leftrightarrow \forall n (nEm \leftrightarrow \pi_E(n) = x)$ , und eine ähnliche Formel, die arithmetisch in  $E$  ist, definiert  $\pi_E(m) = x$  für  $x \in \omega^\omega$ . Daher ist  $A \Sigma_2^1$ .  $\square$

Die Untersuchung von  $\mathbf{L}$  erhielt dann durch Jensen ab Ende der 1960er Jahre neuen Aufschwung. Seit den 1970er Jahren findet man auch immer mehr dickere innere Modelle, Kernmodelle genannt, die einige Eigenschaften mit  $\mathbf{L}$  teilen. Neben  $\mathbf{L}$  ist auch das Dodd-Jensensche Kernmodell  $\mathbf{K}$  eine wichtige Konstruktion. Die dahinterstehende Theorie heißt Feinstrukturtheorie oder Kernmodelltheorie.

# Kapitel 6

## Die Bereitstellung abzählbarer transitiver Modelle

### 6.1 Induktion und Rekursion über fundierte mengenähnliche Relationen

Erinnerung: Das Fundierungsaxiom (Axiom of Foundation, Axiom of regularity) sagt:

$$\forall x(\exists y \in x \rightarrow \exists y \in x \forall z \in y z \notin x).$$

In diesem Abschnitt werden die stärksten Rekursionstheoreme vorgestellt, die es in ZF gibt. Diese können mit dem  $\Delta_1^F$ -Rekursionstheorem 5.22 kombiniert werden und tragen so entscheidend zu Definition einer Forcingerweiterung bei.

Erinnerung:  $a$  heißt transitiv, wenn  $\forall x \in a \forall y \in xy \in a$ .

**Satz 6.1.** *ZF.  $a \in \mathbf{On}$  gdw  $a$  transitiv ist und  $\langle a, \in \rangle$  eine lineare Ordnung ist (die Konnexitätsforderung anstelle der drei Eigenschaften für lineare Ordnung reicht).*

**Definition 6.2.**  $ZF^- - P$ . Sei  $\mathbf{R}$  eine Relation auf  $\mathbf{A}$ .  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{A}$  können echte Klassen sein.  $\mathbf{R}$  heißt fundiert (auf  $\mathbf{A}$ ) gdw

$$\forall x \subseteq \mathbf{A} (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \neg \exists z \in x z \mathbf{R} y).$$

$y$  heißt ein  $\mathbf{R}$ -minimales Element von  $x$ .

Dies ist wörtlich Definition 1.25, aber mit Klassenvariablen. Wenn wir nun das Rekursionstheorem für eine Eigenschaft  $\varphi$  nachmachen möchten, dann stoßen wir auf die Klasse

$$\{x \in \mathbf{A} \mid \neg \varphi(x)\}.$$

Hat diese ein minimales Element? Oben rangiert  $x$  nur über Teilmengen von  $\mathbf{A}$ .

**Definition 6.3.**  $ZF^- - P$ .  $\mathbf{R}$  heißt mengenähnlich (Kunen: set-like, Lévy: left-narrow, Ziegler: vorgängerklein, Spinas: mengenähnlich) auf  $\mathbf{A}$  gdw  $\forall x \in \mathbf{A} \{y \in \mathbf{A} \mid y \mathbf{R} x\}$  eine Menge ist.

Beispiele:  $\in$  ist auf jeder Klasse mengenähnlich. Jede Relation auf einer Menge ist mengenähnlich.

Gegenbeispiel:  $(\mathbf{On} + \mathbf{On}, <)$ .

**Definition 6.4.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Wenn  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert auf  $\mathbf{A}$  ist und  $x \in \mathbf{A}$  ist, dann definieren wir

1.  $\text{pred}^0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{x\}$ .
2.  $\text{pred}^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup \{\text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \mid y \in \text{pred}^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\}$ .
3.  $\text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup \{\text{pred}^n(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \mid n < \omega\}$ .

**Lemma 6.5.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Wenn  $\mathbf{R}$  mengenähnlich auf  $\mathbf{A}$  ist und  $x \in \mathbf{A}$  ist, dann  $y \in \text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \rightarrow \text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subseteq \text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ .

Von nun an nehmen wir an, dass alle erwähnten Klassen definierbar sind: Dies trifft zu auf  $\mathbf{V}$  (Definition  $x = x$ ),  $\mathbf{L}$  (Definition  $\exists \alpha x \in L_\alpha$ ) und wird nun für  $\mathbf{R}, \mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  unten angenommen. Wenn man diese Annahme nicht machen möchte, kann man die analogen Sätze und Definitionen in  $\text{NBG}^- - \text{P}$  aufstellen.

**Satz 6.6.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Wenn  $\mathbf{R}$  mengenähnlich auf  $\mathbf{A}$  ist dann hat jede nicht leere Teilklasse  $\mathbf{X}$  von  $\mathbf{A}$  ein  $\mathbf{R}$ -minimales Element.

Beweis: Wir nehmen irgendein  $x \in \mathbf{X}$ . dann ist  $\mathbf{X} \cap (\text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \cup \{x\})$  eine nicht leere Teilmenge von  $\mathbf{A}$  und hat daher nach der Definition von Fundiertheit ein  $\mathbf{R}$ -minimales Element.  $\square$

**Satz 6.7.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Satz von der transfiniten Induktion über fundierte mengenartige Relationen. Sei  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert auf  $\mathbf{A}$  und sei  $\varphi$  eine Eigenschaft in der Sprache der ersten Stufe. Dann

$$(\forall x \in \mathbf{A} (\forall y \mathbf{R} x \varphi(y) \rightarrow \varphi(y))) \rightarrow \forall x \in \mathbf{A} \varphi(x). \quad (6.1)$$

Beweis: Wenn nicht, hat  $\{x \in \mathbf{A} \mid \neg \varphi(x)\}$  ein  $\mathbf{R}$ -minimales Element und dies widerspricht der Prämisse der Gleichung (6.1).  $\square$

Eine Operation  $\mathbf{F}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  ist eine Relation auf  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ , bei der es zu jedem Element aus der Urbildklasse  $\mathbf{X}$  genau eine Element aus dem Bildklasse  $\mathbf{Y}$  gibt, das in Relation steht.

**Satz 6.8.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Satz von der transfiniten Rekursion über fundierte mengenähnliche Relationen. Sei  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert auf  $\mathbf{A}$  und sei  $\mathbf{F}: \mathbf{A} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ . Dann gibt es genau eine Operation  $\mathbf{G}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$  so dass

$$\forall x \in \mathbf{A} (\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \upharpoonright \text{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))).$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt leicht aus dem Induktionssatz. Wieder ist die Existenz der interessante Teil:  $g$  heißt  $x$ -Approximation, wenn  $\forall y \in \text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ ,

$$g(y) = \mathbf{F}(y, g \upharpoonright \text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})).$$

Nun zeigt man induktiv über  $\mathbf{R}$ , dass es für jedes  $x \in \mathbf{A}$  eine  $\text{cl}(\mathbf{A}, x\mathbf{R})$ -Approximation gibt.

Induktionsschritt: Seien  $g_y$  schon  $\text{cl}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$ -Approximationen für  $y\mathbf{R}x$ . Dann ist

$$\bigcup \{g_y \mid y\mathbf{R}x\} \cup \{\langle x, \mathbf{F}(x, \bigcup \{g_y \mid y\mathbf{R}x\}) \rangle\}$$

eine  $\text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ -Approximation. Hierbei haben wir das Ersetzungsaxiom (für die definierende Formel der Funktion  $y \rightarrow g_y$ ), das Paarmengenaxiom, und das Aussonderungsaxiom (um die genaue Bildmenge zu erhalten) das Vereinigungsaxiom benutzt. Zum Schluss definiert man  $\mathbf{G}(x) = g(x)$  für eine  $\text{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ -Approximation  $g$ .  $\square$

**Definition 6.9.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Sei  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert auf  $\mathbf{A}$ . Dann definieren wir durch transfinite Rekursion über  $\mathbf{R}$

$$\text{rk}(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \sup\{\text{rk}(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 \mid y\mathbf{R}x, y \in \mathbf{A}\}.$$

$\mathbf{R}$  heißt  $\mathbf{R}$ -Rang.

## 6.2 Die Mostowski-Operation

**Definition 6.10.**  $\text{ZF}^- - \text{P}$ . Sei  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert auf  $\mathbf{A}$ . Dann definieren wir durch transfinite Rekursion über  $\mathbf{R}$  die Mostowski-Operation  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}(x) = \{\mathbf{G}(y) \mid y\mathbf{R}x, y \in \mathbf{A}\}.$$

Die Bildstruktur  $(\mathbf{G}''\mathbf{A}, \in)$  heißt der *Mostowski-Kollaps* von  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ .

Bemerkung. 1. Zum Nachweis der Existenz von  $\mathbf{G}$  braucht man also, um den Rekursionssatz anzuwenden, dass  $\mathbf{F}$  mit  $\mathbf{F}(g) = \text{rge}(g)$  eine Operation von  $\mathbf{V}$  nach  $\mathbf{V}$  ist. Hierzu genügt das Ersetzungsschema mit folgender Formel

$$\varphi(x, y) = (\exists z \in \bigcup \bigcup x)(x = (z, y)),$$

die dann besagt, dass zu jeder Menge von Paaren auch die Menge der zweiten Komponenten dieser Paare eine Menge ist. Für Mengen, die das Vereinigungsaxiom erfüllen, ist diese Formel absolut. Wir kürzen

$$\forall A(\forall x \in A \exists^=1 y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B \forall y (y \in B \rightarrow \exists x \in A \varphi(x, y)))$$

durch  $\text{Ers}_{\text{rge}}$  ab. Wir verwenden dieses Axiom in  $\mathbf{V}$ , um die Existenz des Kollaps zu rechtfertigen, so wie wir vorher beim Satz von Löwenheim und Skolem 5.33 AC im „Hintergrund“, d.h., in  $\mathbf{V}$ , verwendet haben und dadurch  $M \in \mathbf{V}$  erhalten. Da für jedes  $\beta$ ,  $(V_\beta, \in) \models \text{Ers}_{\text{rge}}$ , gilt dies auch für jedes  $M \prec V_\beta$ , doch für die Herleitung der Existenz von  $\mathbf{G}$  wird dies nicht verwendet. In allen transitiven Modellen gilt das Vereinigungsmengenaxiom und damit auch  $\text{Ers}_{\text{rge}}$ . Das Fragment, das im Rekursionssatz 6.8 aufgerufen war, genügt also auch zur Rechtfertigung der Existenz der Mostowski-Operation.

Bemerkung: 2.  $\mathbf{G}$  braucht nicht injektiv zu sein. Zum Beispiel, wenn  $\mathbf{R} = \emptyset$  ist, dann ist  $\mathbf{G}(x) = \emptyset$  für alle  $x \in \mathbf{A}$ .

**Lemma 6.11.**  $ZF^- - P$ .

1.  $(\forall x, y \in \mathbf{A})(x\mathbf{R}y \rightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$ .  $\mathbf{G}$  ist also ein Homomorphismus.
2.  $\mathbf{G}''\mathbf{A} = \mathbf{M}$  ist transitiv.
3.  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$ .
4.  $(\forall x \in \mathbf{A}) \text{rk}(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \text{rk}(\mathbf{G}(x))$ .

Wann ist  $\mathbf{G}$  ein Isomorphismus? Wann ist  $\mathbf{G}$  injektiv?

**Definition 6.12.**  $ZF^- - P$ . Sei  $\mathbf{R}$  eine Relation auf  $\mathbf{A}$ . Dann heißt  $\mathbf{R}$  extensional auf  $\mathbf{A}$  gdw

$$\forall x, y \in \mathbf{A} (\forall z \in \mathbf{A} (z\mathbf{R}y \leftrightarrow z\mathbf{R}x) \rightarrow x = y).$$

**Lemma 6.13.**  $ZF^- - P$ . Wenn  $\mathbf{N}$  transitiv ist, dann ist  $\in$  extensional auf  $\mathbf{N}$ .

Beweis:  $\text{pred}(\mathbf{N}, x, \in) = x$  für alle  $x \in \mathbf{N}$ . □

**Lemma 6.14.**  $ZF^- - P$ . Sei  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert und extensional auf  $\mathbf{A}$ , dann ist  $\mathbf{G}$  ein Isomorphismus von  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  auf  $\langle \text{rge } \mathbf{G}, \in \rangle$ , d.h.,  $\mathbf{G}$  ist bijektiv und

$$\forall x, y \in \mathbf{A} (x\mathbf{R}y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)).$$

Beweis:  $\mathbf{G}$  ist injektiv. Sonst sei  $x$  ein  $\mathbf{R}$ -minimales Element von  $\{x \in \mathbf{A} \mid \exists y \in \mathbf{A} (x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y))\}$ .

1. Fall  $\exists z \in \mathbf{A} (z\mathbf{R}x \wedge \neg z\mathbf{R}y)$ . Dann ist  $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$ , und es gibt ein  $w$ , so dass  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ , da  $\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$ . Dieses  $w$  erfüllt  $w\mathbf{R}y$ . Also ist also  $w \neq z$ . Also ist  $(w, z)$  ein kleineres Gegenbeispiel, im Widerspruch zur Minimalität von  $x$ .

2. Fall  $\exists z \in \mathbf{A} (\neg z\mathbf{R}x \wedge z\mathbf{R}y)$ . Dann ist  $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$ , und es gibt ein  $w$ , so dass  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ , da  $\mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$ . Dieses  $w$  ist  $w\mathbf{R}x$ . Also ist  $w \neq z$ . Also ist  $(w, z)$  ein kleineres Gegenbeispiel, im Widerspruch zur Minimalität von  $x$ .

Zur Erhaltung der Relationen: Wir müssen nur noch " $\leftarrow$ " zeigen. Sei  $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y) = \{\mathbf{G}(u) \mid u\mathbf{R}y\}$ . Da  $\mathbf{G}$  injektiv ist, ist das nur für  $x\mathbf{R}y$  möglich. □

**Satz 6.15.**  $ZF^- - P$ . Sei  $\mathbf{R}$  mengenähnlich und fundiert und extensional auf  $\mathbf{A}$ , dann gibt es genau eine transitive Klasse  $\mathbf{M}$  und genau eine Abbildung  $\mathbf{G}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}$ , so dass  $\mathbf{G}: \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle \cong \langle \mathbf{M}, \in \rangle$ .

**Korollar 6.16.**  $ZF - P$ . Wenn  $\in$  extensional auf  $\mathbf{A}$  ist, dann gibt es genau eine transitive Klasse  $\mathbf{M}$  und genau eine Abbildung  $\mathbf{G}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}$ , so dass  $\mathbf{G}: \langle \mathbf{A}, \in \rangle \cong \langle \mathbf{M}, \in \rangle$ .

**Definition 6.17.** Traditionell werden Fragmente von ZF als  $ZF^*$  und Fragmente von ZFC als  $ZFC^*$  geschrieben.

**Korollar 6.18.** ZF. *Jedes Fragment  $ZFC^*$  hat ein abzählbares transitives Modell.*

Beweis: Wir vergrößern das Fragment eventuell, so dass es Ext und Fund enthält. Der Reflexionssatz 5.15 liefert  $V_\beta \models ZFC^*$ , der Satz von Löwenheim und Skolem abwärts 5.33 liefert ein abzählbares  $N \prec V_\beta$ , und schließlich sei  $(M, \in)$  der Mostowski-Kollaps von  $(N, \in)$ . Sei nun das Extensionalitätsaxiom Ext in  $ZFC^*$ . Dann ist  $(M, \in) \cong (N, \in)$  und daher  $(M, \in) \models ZFC^*$ .  $\square$

Bemerkung: Beachten Sie, wir zeigten also in dem Korollar für jedes Fragment  $ZFC^*$ ,  $ZF \vdash \text{Con}(ZFC^*)$ . Die Aussage

$$ZF \vdash \text{„für jedes Fragment } ZFC^* \text{ von ZFC gilt } \text{Con}(ZFC^*)\text{“}$$

ist stärker, und gilt nach dem zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz nicht.



# Kapitel 7

## Forcing

### 7.1 Abzählbare transitive Modelle in Konsistenzbeweisen

Wie kann man abzählbare transitive Modelle der Fragmente  $T$  von ZF zu Beweisen der relativen Widerspruchsfreiheit benutzt?

Angenommen, wir wollen  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \neg\text{CH})$  zeigen.

Hierzu genügt:  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow$  für jedes endliche Fragment  $\text{ZFC}^*$  von ZFC,  $\text{Con}(\text{ZFC}^* + \neg\text{CH})$ . Sei  $\text{ZFC}^*$  vorgegeben. Dann arbeiten wir rückwärts und legen ein (anderes) endliches Fragment  $T' = T'(\text{ZFC}^*)$  fest, so dass für jedes abzählbare transitive Modell  $M \models T'$  (und es gibt so ein  $M!$ ) gilt,

$$\text{ZFC} \vdash (M \models T') \rightarrow (\exists M', E (M', E) \models \text{ZFC}^* + \neg\text{CH}). \quad (*)$$

$(M', E) = (M[G], E)$  wird die Forcing-Erweiterung von  $M$  um ein Element  $G \in M$  sein. Wenn die Forcing-Halbordnung nicht extrem arm ist, wird  $G \in M' \setminus M$  sein. Meistens kommen mit dem neuen Element  $G$  noch weitere neue Elemente hinzu, da  $\text{ZFC}^*$  viele Existenzforderungen enthalten kann.  $E \upharpoonright M \times M = \in$  und da  $M[G]$  transitiv und extensional sein wird, wird, wird  $E = \in$  sein. Das Konstruktionsprinzip für  $M'$  hängt in keiner Weise vom gewählten Fragment  $\text{ZFC}^*$  ab. Forcing funktioniert auch über ZF-Modellen, da man AC im Ausgangsfragment nur braucht, wenn AC zu  $\text{ZFC}^*$  gehört. Ein Teil von ZF, der zur jeweiligen Instanz des Reflexionstheorems gebraucht wird, gehört meistens zu dem oben erwähnten „anderen endlichen Fragment“. Gerade bei den Schemata ist  $T'(\varphi)$  nicht wörtlich  $\varphi$ . Beispiele lernt man im Beweis von Satz 7.30 kennen.

Das Ganze funktioniert daher auch, wenn man  $T'$  vorher nicht kennt, da es ja für jedes  $T'$  abzählbare transitive Modelle gibt. Die Bestimmung von  $T'$  ist Luxus-Arbeit.

Im eingebürgerten Jargon kürzt man nun alle diese Überlegungen mit den Fragmenten ab, und sagt

Sei  $M$  ein abzählbares transitives Modell (ctm) von ZFC.

$M$  wird dann zu  $M' \models \text{ZFC} + \neg\text{CH}$  erweitert. ctm steht für countable transitive model.

Diese Überlegung kann nach obiger Arbeit immer in einen technisch sauberen Beweis zurückübersetzt werden. *Man macht also keinen Fehler, wenn man so tut, als ob es abzählbare transitive Modelle von ZFC gäbe.* Statt  $\neg\text{CH}$  kann jeder andere  $\mathcal{L}(\in)$ -Satz stehen.

In (\*) wird auf der linken Seite wieder ein bestimmter Teil von ZFC benutzt, der allgemeines enthält wie den Satz von Rasiowa und Sikorski (Satz 7.4), aber auch spezifischeres über  $T'(\text{ZFC}^*)$  und  $\text{ZFC}^*$ .

Dieses Abschnittchen war unsere Abhandlung der sogenannten metamathematischen Seite des Forcing. Es gibt auch alternative Vorgehensweisen. Gute Erklärungen gibt es hierzu in den Büchern von Kunen [21] und von Jech [15, 16]. Nun kommen wir zur eigentlichen Technik einer Erweiterung durch Forcing: dem Übergang von  $M$  zu  $M'$  in der obigen Implikation.

## 7.2 Halbordnungen, Filter und dichte Mengen

Nun soll das Universum eines ctm  $(M, \in) \models T$  vergrößert werden zu einem Universum  $M[G]$ , das ein vorgegebenes Fragment  $\text{ZFC}^*$  und einen Wunsch  $\varphi$  erfüllt. Die Erweiterung wird durch ein einziges neues Element,  $G \in M[G] \setminus M$ , bestimmt. Es kommen noch weitere Elemente zu  $M[G] \setminus M$  hinzu, die sich jedoch aus  $G$  und  $M$  herleiten. In der Regel genügt  $T'(\text{ZFC}^*)$ , das mindestens die acht einzelnen Axiome enthält, das Ersetzungsschema für die Funktion  $x \mapsto \check{x}$  fordert, kartesische Produkte fordert, und für jede Instanz des Ersetzungsschemas oder des Aussonderungsschemas eine geeignete Instanz des Kollektionsschemas oder des Aussonderungsschemas mit einer  $\Vdash^*$ -Formel enthält. Mit viel Geduld kann man, gegeben  $\text{ZFC}^*$ ,  $T'(\text{ZFC}^*)$  recht sparsam niederschreiben.

Später können auch Eigenschaften, die über ZFC hinausgehen, von  $M$  gefordert werden, wenn z.B. besondere Halbordnungen in  $M$  existieren sollen oder sich die Auswertung von  $\Vdash^*$  in bestimmter Weise verhalten soll. Nach dem vorigen Kapitel darf man auch vereinfachend „sei  $M$  ein abzählbares transitives Modell von ZFC“ voraussetzen.

Das in der Regel neu hinzugefügte Element  $G$  wird für eine Halbordnung  $(P, \leq_P) \in M$  sein ein über  $M$  generischer Filter sein. Einzelne Elemente  $p \in P$  können schon Wahrheiten  $(M[G], \in) \models \varphi$  bestimmen („erzwingen“) für alle  $G$  mit  $p \in G$ . Dies wird die sogenannte Forcing-Relation (Erzwingungsrelation)  $p \Vdash \varphi$  sein.

**Definition 7.1.** Eine Struktur  $(P, \leq_P)$  mit einer zweistelligen Relation  $\leq$  heißt *Halbordnung* oder *partielle Ordnung* gdw  $(P, \leq_P)$  die folgenden drei Sätze erfüllt:

- (1) (Transitivität)  $(\forall x, y, z)((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$
- (2) (Reflexivität)  $(\forall x)(x \leq x)$
- (3) (Antisymmetrie)  $(\forall x, y)((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$

Bemerkung: Verzichtet man auf die Antisymmetrie, erhält man eine Quasiordnung  $(P, <_P)$ . Auf dieser Quasiordnung kann man die Äquivalenzrelation  $x \equiv y$  gdw  $(x \leq_P y \wedge y \leq_P x)$  definieren, die mit  $\leq_P$  verträglich ist. Man erhält

eine Halbordnung  $(P/\equiv, \leq_P / \equiv)$  auf den Äquivalenzklassen. Im Forcingsinne sind  $P$  und  $P/\equiv$  äquivalent, da man eine dichte Einbettung von  $P$  in  $P/\equiv$  hat. Sobald man Forcing iteriert und nur noch mit Namen für Forcings arbeitet, kommen in der Regel nur noch Quaiordnungen vor. Dies schadet nichts. Die Antisymmetrie wird nie gebraucht.

Die Elemente von  $P$  heißen Bedingungen, conditions.

- Definition 7.2.** (1) Für  $p, q \in P$  mit  $q \leq p$  sagen wir „ $q$  ist stärker als  $p$ “ oder „ $q$  erweitert  $p$ .“<sup>1</sup>
- (2)  $p$  und  $q$  heißen *inkompatibel*, *unverträglich*, in Zeichen  $p \perp q$ , gdw es kein  $r$  gibt, so dass  $r \leq p \wedge r \leq q$ . Im gegenteiligen Falle heißen  $p$  und  $q$  *kompatibel*, *verträglich*, und man schreibt  $p \parallel q$  oder  $p \not\perp q$ .
- (3) Aus technischen Gründen betrachten wir nur Halbordnungen, die ein größtes Element 1 enthalten.

ÜBUNG: Beweisen Sie, dass die 1 in  $P$  eindeutig ist! Hierzu nutzt man die Antisymmetrie. Die Eindeutigkeit der 1 wird nie gebraucht.

Beachten Sie: Vergleichbare Elemente ( $p \leq q$  oder  $q \leq p$ ) sind kompatibel, doch es kann auch unvergleichbare kompatible Elemente geben.

Wir betrachten einige Beispiele.  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist keine Halbordnung in unserem Sinne, da es kein größtes Element gibt.  $(\mathbb{N}, \geq)$  ist eine Halbordnung, doch wir werden bald sehen, dass sie nicht zu einer echten Erweiterung führt, da je zwei ihrer Elemente kompatibel sind.

Sei  $\mathbb{O}$  die Menge aller offenen nicht-leeren Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $(\mathbb{O}, \subseteq)$  eine sehr schöne Halbordnung.

Eine andere sehr schöne Halbordnung ist die Menge aller messbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit strikt positivem Maß mit  $\subseteq$  als Halbordnung. Zwei Mengen sind genau dann inkompatibel, wenn ihr Schnitt eine Nullmenge ist.

Statt  $\mathbb{O}$  betrachtet man in der Literatur die eng verwandte Halbordnung  $\mathbb{C}$  der clopen Teilmenge der irrationalen Zahlen  $\mathbb{R}$ , wieder mit  $\subseteq$  als Halbordnung. Wir werden sehen:  $\mathbb{O}$  und  $\mathbb{C}$  führen zu äquivalenten Forcings.  $\mathbb{C}$  steht für Cohen-Halbordnung (oder Cohen-Algebra, weil man jede Halbordnung auf kanonische Weise zu einer booleschen Algebra erweitern kann, die im Forcing-Sinne genau dasselbe bewirkt. Wir werden oft mit Halbordnungen und selten mit booleschen Algebren arbeiten)

Statt  $\mathbb{M}$  (Maßalgebra) haben sich die Namen  $\mathbb{B}$  (Borel) und auch random algebra für die Maßalgebra eingebürgert.

Eine andere sehr schöne Halbordnung ist

$$\text{Fn}_{<\omega}(X, 2) = \{p \mid p: X_0 \rightarrow 2, X_0 \subseteq X, X_0 \text{ ist endlich}\}$$

für eine beliebige Menge  $X$ . Die Ordnung auf  $\text{Fn}_{<\omega}(X, 2)$  ist  $\supseteq$ , die umgekehrte mengentheoretische Inklusion. Das größte Element ist die leere Funktion. Zwei

<sup>1</sup>**Vorsicht:** Die ältere Kovention ist: Man schreibt  $p \leq q$  für „ $q$  ist stärker als  $p$ “! Heute wird diese Konvention besonders in Israel noch gepflegt. Wir versuchen, uns an die sogenannte „alphabetische Konvention“ zu halten: frühere Buchstaben stehen immer für schwächere Bedingungen, egal ob  $\leq$  oder  $\geq$  steht.

Bedingungen sind genau dann kompatibel, wenn ihre Vereinigung eine Funktion ist. Die Halbordnung  $\text{Fn}_{<\omega}(\omega, 2)$  ist übrigens im Forcing äquivalent mit  $\mathbb{O}$  und mit  $\mathbb{C}$ .

**Definition 7.3.** (1) Sei  $P$  eine Halbordnung und sei  $D \subseteq P$ ,  $p \in P$ . Dann liegt/ist  $D$  dicht unter  $p$ , wenn

$$(\forall q \leq p)(\exists d \in D)(d \leq q).$$

$D$  liegt dicht in  $P$ , wenn  $D$  dicht unterhalb der 1 liegt.

- (2) Eine Menge  $A$  heißt eine *Antikette*, wenn die Elemente von  $A$  paarweise inkompatibel sind.
- (3) Eine Menge  $G \subseteq P$  heißt *Filter* falls gilt:
- (a)  $G \neq \emptyset$ .
  - (b)  $(\forall p \in P)(\forall q \in G)(q \leq p \rightarrow p \in G)$ .<sup>2</sup>
  - (c)  $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)$ .  $r$  heißt ein Schnitt von  $p$  und  $q$ .
- (4) Ist  $\mathcal{D}$  eine Familie dichter Teilmengen von  $P$  und  $G$  ein Filter, so heißt  $G$   $\mathcal{D}$ -generisch, wenn  $G$  jedes Element von  $\mathcal{D}$  schneidet.  $G$  heißt (etwas inkonsistent)  $P$ -generisch über  $M$ , wenn  $P \in M$  und  $G$  jedes  $D \in M$ , das eine dichte Teilmenge von  $P$  ist, schneidet. Hier und im Folgenden schreiben wir oft  $P$ , wenn eigentlich  $(P, \leq_P)$  stehen sollte.

ÜBUNG Wie sehen dichte Teilmengen von  $\mathbb{O}$  aus?

Der folgende Satz ist mit dem Baire'schen Categoriesatz verwandt.

**Satz 7.4.** *Der Satz von Rasiowa und Sikorski. Sei  $M$  abzählbar und  $p \in P$ . Dann gibt es einen  $P$ -generischen Filter  $G$  über  $M$ , so dass  $p \in G$ .*

Beweis: Sei  $\langle D_n \mid n < \omega \rangle$  eine Aufzählung aller dichten Teilmengen von  $P$ , die in  $M$  sind. Induktiv wählen wir  $q_n \in P$ , so dass

- (1)  $q_0 = p$ ,
- (2)  $q_{n+1} \leq q_n$ ,
- (3)  $q_{n+1} \in D_n$

Sei  $G$  der von  $\{q_n \mid n \in \omega\}$  erzeugte Filter, d.h., in unserem Falle:  $G = \{q \mid (\exists n)(q \geq q_n)\}$ , da die Menge schon unter Schnitten abgeschlossen ist. Dann ist  $G$   $P$ -generisch über  $M$ .  $\square$

Für diesen Satz brauchten wir, dass wir *abzählbare* transitive Modelle  $M$  haben.

In unseren Anwendungen wird  $M$  ein ctm eines genügend starken endlichen  $T \subset \text{ZFC}$  sein, und es wird  $P \in M$  sein. Wir schreiben dann nur „sei  $M$  ein ctm und  $P \in M$ “ Es ist wichtig zu wissen, dass viele Eigenschaften absolut

<sup>2</sup>Vorsicht. In der Definition von Filter ist ein Druckfehler in Kunen Kapitel II Def 2.4 (b).

für  $M$  sind, so zum Beispiel „ $P$  ist Halbordnung“ oder „ $D$  ist dicht“. Die Aufzählung der  $D_n$  liegt jedoch außerhalb von  $M$ , da Abzählbarkeit keineswegs eine absolute Eigenschaft ist.  $D_n \in M$ , nur für jedes einzelne  $D_n$ . Im nächsten Lemma brauchen wir, dass  $M$  ein bisschen mehr von ZFC erfüllt. So etwas steht dann in  $\psi \in T(\text{ZFC}^*)$  zum Beispiel im Beweis der relativen Konsistenz von  $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ .

Bemerkung: Wer sehr umsichtig ist, kann auch Buch darüber führen, wieviel von der Voraussetzung „ $P \in M$ “ benutzt wird. Bei Forcing mit Klassen (als Halbordnungen) setzt man nur „ $P \subseteq M$  und jeder mengengroße Anfangsabschnitt von  $P$  ist ein Element von  $M$ “ voraus. Vorsicht ist geboten, da der Satz über  $M[G] \models \text{ZFC}^*$  bei Klassenforcing i.A. nur unter zusätzlichen Voraussetzungen wahr ist. Wir beschränken uns in den nächsten Kapiteln auf „Mengenforcing“, was heißt, dass  $(P, \leq_P, 1_P) \in M$  vorausgesetzt wird.

**Lemma 7.5.** *Sei  $M$  ein ctm, in dem geeignete (s.u.) Instanzen des Aussonderungsschemas gelten. Sei  $P \in M$  eine Halbordnung, so dass*

$$(\forall p)(\exists q, r)(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$$

(eine Halbordnung mit dieser Eigenschaft heißt „splitting“), und sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$ . Dann ist  $G \notin M$ .

Beweis. Wenn  $G \in M$  wäre, so auch  $D = P \setminus G \in M$ , da wir das Aussonderungsschema für  $\setminus$  haben. Außerdem ist die mengentheoretische Differenz absolut.  $D$  ist dicht, da, gegeben  $p$ , nicht  $r$  und  $q$  gleichzeitig in  $G$  liegen können, weil dies der Filter-Eigenschaft widerspricht. Doch  $G \cap D = \emptyset$ , im Widerspruch zur Generizität.  $\square$

ÜBUNG: Wenn  $P$  nicht splitting ist, dann gibt es einen  $P$ -generischen Filter über  $M$  in  $M$ .

### 7.3 Namen und Auswertungen

**Definition 7.6.**  $\tau$  ist ein  $P$ -Name gdw  $\tau$  eine Relation ist und

$$(\forall x \in \tau)(\exists \sigma \in \bigcup \tau)(\exists p \in P \cap \bigcup \tau)(x = \langle \sigma, p \rangle \wedge \sigma \text{ ist ein } P\text{-Name}).$$

Dies ist eine Definition einer charakteristischen Operation  $\mathbf{H}: \mathbf{V} \rightarrow \{0, 1\}$  (d.h.  $\mathbf{H}(\tau) = 1$  gdw  $\tau$  ist ein  $P$ -Name,  $\mathbf{H}(\tau) = 0$  sonst) für die Klasse aller Namen durch transfinite Rekursion über die Relation  $\in$ . Falls man das  $\mathbf{F}$  aus dem Rekursionssatz 6.8 geeignet  $\Delta_0$ -definierbar wählt, kann man  $\mathbf{H}$  induktiv über die fundierte mengenähnliche Relation  $\mathbf{R}$

$$\sigma \mathbf{R} \tau \text{ gdw } (\exists p \in P)(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)$$

mit einer  $\Delta_0$ -Formel definieren.  $\mathbf{H}(\tau)$  braucht nur Rekursion über  $\mathbf{H} \upharpoonright \text{th}(\tau)$ , die transitive Hülle von  $\tau$ , wie im Beweis zu 6.8 und außerdem trifft der  $\Delta_1^{\mathbf{F}}$ -Rekursionssatz zu. Wir halten fest, dass die Eigenschaft „ $\tau$  ist ein  $P$ -Name“, d.h.  $\mathbf{H}(\tau) = 1$ ,  $\Delta_1^{\mathbf{F}}$  und absolut über transitiven Modellen und Klassen ist.

**Definition 7.7.**  $\mathbf{V}^P$  ist die Klasse aller  $P$ -Namen. Wenn  $M$  transitiv ist, dann setzen wir  $M^P = \mathbf{V}^P \cap M$ . Wegen der Absolutheit ist diese Definition äquivalent zur Definition

$$M^P = \{\tau \in M \mid (\tau \text{ ist ein } P\text{-Name})^M\}.$$

**Definition 7.8.** Sei  $\tau \in \mathbf{V}^P$  und sei  $G \in \mathbf{V}$  eine Menge.  $\text{val}(\tau, G) = \tau_G = \{\sigma_G \mid (\exists p \in G)(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$  heißt die *Auswertung* des Namens  $\tau$  unter/mit  $G$ .

Wieder wurde  $\Delta_1^F$ -Rekursion über  $\mathbf{R}$  verwendet zur Definition von  $\text{val}(\tau, G)$ , und auch dieses ist absolut.

**Definition 7.9.** Sei  $M$  transitiv.  $P \in M$ ,  $G \subseteq P$ , dann

$$M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^P\}.$$

**Definition 7.10.**  $\text{dom}(\tau) = \{\sigma \mid \exists p(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$  ist der Definitionsbereich von  $\tau$ , obwohl  $\tau$  nur eine Relation, keine Funktion ist.

$\tau \mapsto \tau_G$  ist eine absolute Funktion für alle transitiven  $N$ , die  $G \in N$  erfüllen.

**Lemma 7.11.** Sei  $N$  ein transitives Modell und  $M \subseteq N$  und  $G \in N$ , dann  $M[G] \subseteq N$ .

Beweis:  $\tau_G = (\tau_G)^N \in N$ . □

Nun ist zu zeigen: Für jedes Fragment  $\text{ZFC}^*$  können wir  $T'(\text{ZFC}^*)$  so wählen, dass aus  $M \models T'(\text{ZFC}^*)$  folgt:  $M[G]$  erfüllt  $\text{ZFC}^*$ . Dies wird recht lang.

Wir beginnen mit einem Beispiel für die Idee, dass Wahrheiten über  $M[G]$  schon aus der Kenntnis einiger Elemente von  $G$  bestimmt werden können.

Beispiel:

$$\{\langle 0, p \rangle\}_G = \begin{cases} \{0\}, & \text{wenn } p \in G, \\ 0, & \text{wenn } p \notin G. \end{cases}$$

**Definition 7.12.**  $\check{x} = \{\langle \check{y}, 1_P \rangle \mid y \in x\}$

Wieder greift der  $\Delta_1^F$ -Rekursionssatz.

**Lemma 7.13.** Sei  $M$  transitiv und erfülle das Paarmengenaxiom und das Ersetzungsaxiom für die Funktion  $x \mapsto \check{x}$  (mit der genauen Bildmenge),  $P \in M$  Halbordnung und  $G$  ein Filter auf  $P$ , dann gilt:

- (a)  $(\forall x \in M)(\check{x} \in M^P \wedge \check{x}_G = x)$ ,
- (b)  $M \subseteq M[G]$ .

Beweis:  $\check{x}_G = x$  wird durch  $\in$ -Induktion über  $x$  gezeigt. □

**Definition 7.14.**  $\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle \mid p \in P\}$

**Lemma 7.15.**  $\Gamma_G = G$ .  $G \in M[G]$ . □

**Lemma 7.16.**  $M[G]$  ist transitiv.  $\square$

Wir erinnern an die Definition des Rangs.  $\text{rk}(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$ .

**Lemma 7.17.** (a)  $(\forall \tau \in M^P)(\text{rk}(\tau_G) \leq \text{rk}(\tau))$ ,

(b)  $\mathbf{On} \cap M[G] = \mathbf{On} \cap M$ .

Beweis: (a): Durch  $\in$ -Induktion über  $\tau$ .  $\text{rk}(\tau_G) = \sup\{\text{rk}(\sigma_G) + 1 \mid \exists p \in G(\sigma, p) \in \tau\} \leq \sup\{\text{rk}(\sigma) + 1 \mid \exists p \in P(\sigma, p) \in \tau\} \leq \sup\{\text{rk}(\sigma) + 1 \mid \sigma \in \bigcup \bigcup \tau\} \leq \text{rk}(\tau)$ . (b): Nach (a) folgt,  $M[G] \cap \mathbf{On} \subseteq M \cap \mathbf{On}$ , da  $M$  unter der Rang-Funktion abgeschlossen ist. Da  $M \subseteq M[G]$ , gilt Gleichheit.  $\square$

**Definition 7.18.** (a)  $\text{up}(\sigma, \tau) = \{\langle \sigma, 1_P \rangle, \langle \tau, 1_P \rangle\}$ .

(b)  $\text{op}(\sigma, \tau) = \text{up}(\text{up}(\sigma, \sigma), \text{up}(\sigma, \tau))$ .

**Lemma 7.19.** Seien  $\sigma, \tau \in M^P$  und  $M$  erfülle das Paarmengenaxiom.

(a)  $\text{up}(\sigma, \tau) \in M^P$  und  $(\text{up}(\sigma, \tau))_G = \{\sigma_G, \tau_G\}$ .

(b)  $\text{op}(\sigma, \tau) \in M^P$ , und  $(\text{op}(\sigma, \tau))_G = \langle \sigma_G, \tau_G \rangle$ .  $\square$

**Lemma 7.20.** Sei  $M$  ein ctm, gelte in  $M$  das Paarmengenaxiom. Das Extensionalitätsaxiom, das Fundierungsaxiom, das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsmengenaxiom sind in  $M[G]$  wahr.

Beweis: Da  $M[G]$  transitiv ist, gilt das Extensionalitätsaxiom. Da in  $\mathbf{V}$  das Fundierungsaxiom gilt, gilt dies auch für jede Klasse. Das Paarmengenaxiom folgt aus dem Lemma. Für die Vereinigung, sei  $a = \tau_G \in M[G]$ . Sei  $\pi = \bigcup \text{dom}(\tau)$ . Man rechnet aus, dass  $\pi_G \supseteq \bigcup a$ .  $\square$

Nun könnte man mit dem Aussonderungsaxiom in  $M[G]$  zeigen, dass man  $\bigcup a$  aus  $\pi_G$  aussondern kann. Das Aussonderungsaxiom folgt erst später, nach dem Hauptsatz über Forcing. Wir stellen daher den Beweis zurück, oder geben eine ÜBUNG, die nur die Filter-Eigenschaft von  $G$  (nicht aber die Generizität) benutzt:

ÜBUNG: Sei

$$\pi' = \{\langle \rho, s \rangle \mid (\exists \langle \sigma, r \rangle \in \tau)(\exists q)(\langle \rho, q \rangle \in \sigma \wedge s \leq q \wedge s \leq r)\}.$$

Dann ist  $\pi'_G = \bigcup \tau_G$ .

Wir verwendeten noch nicht, dass  $G$  alle dichten Mengen schneidet. Dies hat auch Bedeutung für Mengen, die nur unterhalb eines gewissen Punkts dicht sind:

**Lemma 7.21.** Sei  $E \in M$ .  $E \subseteq P$ . Sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$ , dann gilt:

(a) Entweder ist  $G \cap E \neq \emptyset$  oder  $(\exists q \in G)(\forall r \in E)(r \perp q)$ .

(b) Wenn  $p \in G$  und  $E$  dicht unter  $p$  ist, dann  $G \cap E \neq \emptyset$ .

Beweis: (a) Wir setzen

$$D = \{s \mid (\exists r \in E)(s \leq r)\} \cup \{q \mid (\forall r \in E)(r \perp q)\}.$$

$D$  ist dicht und  $G \cap D \neq \emptyset$  nach der Generizität.

Für (b): Sei  $G \cap E = \emptyset$ . Dann gibt es nach (a) ein  $q \in G$ , das inkompatibel mit allen  $r \in E$  ist. Sei  $q' \leq q$  und  $q' \leq p$ , so ein  $q'$  gibt es, da  $G$  ein Filter ist. Da  $E$  dicht unter  $p$  ist, gibt es ein  $r \in E$ ,  $r \leq q'$ . Aber dann ist  $r \leq q$ , im Widerspruch zu  $r \perp q$ .  $\square$

## 7.4 Die Forcingrelation

**Definition 7.22.** Sei  $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(\in)$ , und  $x_1, \dots, x_n$  seien alle freien Variablen in  $\varphi$ . Sei  $M$  ein ctm,  $P \in M$  eine Halbordnung,  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$ , und sei  $p \in P$ , dann sagen wir „ $p$  erzwingt/forcirt (über  $M$ ) (mit  $P$ )  $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ “ und schreiben

$$p \Vdash_{P,M} \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

gdw

$$(\forall G)((G \text{ ist } P\text{-generisch über } M \wedge p \in G) \rightarrow \varphi^{M[G]}((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)).$$

Wenn  $P$  (genauer  $(P, \leq_P)$ ) oder/und  $M$  bekannt sind, lassen wir die Indizes weg.

**Lemma 7.23.** (a)  $(p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge q \leq p) \rightarrow q \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

(b)  $p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge p \Vdash \psi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  gdw  $p \Vdash (\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \dots, \tau_n))$ .

Nun ist unser nächstes Ziel, zu zeigen, dass  $p \Vdash \varphi$  äquivalent zu einer Aussage relativiert auf  $M$  ist, und wir nennen diese  $(p \Vdash^* \varphi)^M$ .

**Definition 7.24.** Induktiv über die fundierte mengenähnliche Relation „ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ “ (d.h.  $(\pi_1, \pi_2) \mathbf{R} \times \mathbf{R} (\sigma_1, \sigma_2)$  :gdw  $\pi_1 \mathbf{R} \sigma_1$  und  $\pi_2 \mathbf{R} \sigma_2$ ) auf  $\mathbf{V}^P \times \mathbf{V}^P$  definieren wir  $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$  wie folgt:

(a)  $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$  gdw

( $\alpha$ ) für alle  $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ ,

$$\{q \leq p \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

dicht unter  $p$  ist, und

( $\beta$ ) für alle  $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ ,

$$\{q \leq p \mid q \leq s_2 \rightarrow \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 (q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

dicht unter  $p$  ist,

und nun definieren wir leicht (ohne Rekursion)

(b)  $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$  gdw

$$\{q \mid \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2 (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)\}$$

dicht unter  $p$  ist.

Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$  definieren wir nun weiter  $p \Vdash^* \varphi$ .

(c)  $p \Vdash^* (\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \dots, \tau_n))$  gdw  $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  und  $p \Vdash^* \psi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

(d)  $p \Vdash^* \neg \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  gdw für kein  $q \leq p$ ,  $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

(e)  $p \Vdash^* \exists x \varphi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$  gdw

$$\{r \mid (\exists \sigma \in V^P)(r \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n))\}$$

dicht unter  $p$  ist.

ÜBUNG: Überlegen Sie sich, dass  $\Vdash^*$ , genauer, eine Eigenschaft  $\text{Force}^*(p, \varphi, \tau_1, \dots, \tau_n, P, \leq_P)$ , wirklich entlang einer fundierten mengenähnlichen Relation definiert wird, so dass der Satz 6.8 anwendbar ist! Für quantorenfreie  $\varphi$  ist  $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  absolut, da  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  absolut ist, und die Rekursion in Definition 7.24 (a)  $(\alpha), (\beta)$  nur über absolute Eigenschaften spricht. Doch der Quantor in (e) ist nicht absolut.

$\varphi(\bar{\tau})$  mit einem  $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$  und  $\tau_i \in \mathbf{V}^P$  heißt Formel der Forcing-Sprache.

**Lemma 7.25.** *Äquivalent sind*

- (1)  $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,
- (2)  $\forall r \leq p (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n))$ ,
- (3)  $\{r \mid r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$  ist dicht unterhalb  $p$ .

Beweis: (2)  $\rightarrow$  (1) und (2)  $\rightarrow$  (3) sind nur Abschwächungen. Nun beweisen wir die fehlenden beiden Implikationen zunächst für  $\tau_1 = \tau_2$  und für  $\tau_1 \in \tau_2$ . (1)  $\rightarrow$  (2) gilt dann nach der induktiven Definition von  $\Vdash^*$ , die eine Dichtigkeitssaussage enthält, und der folgender Tatsache: Wenn  $D$  dicht unter  $p$  ist und  $r \leq p$  ist, dann ist  $D$  auch dicht  $r$ . (3)  $\rightarrow$  (1) folgt aus der Tatsache: Wenn  $\{r \mid D \text{ ist dicht unter } r\}$  dicht unter  $p$  ist, dann ist  $D$  dicht unter  $p$ . Nun ist die Äquivalenz von (1), (2), (3) für atomare  $\varphi$  bekannt, und nun zeigen die Klauseln (c) bis (e) der Definition von  $\Vdash^*$ , dass sich die Äquivalenz durch sie hochzieht.  $\square$

ÜBUNG (zum  $\wedge$ -Schritt in der vorvorigen Zeile): Der Schnitt zweier dichter Teilmengen von  $P$  kann leer sein. Wir nennen  $D$  *offen*, wenn für alle  $p \in D$  für alle  $q \leq p$ ,  $q \in D$ .  $\{p \mid p \Vdash^* \varphi\}$  und  $\{p \mid p \Vdash \varphi\}$  sind offen. Der Schnitt endlich vieler offener dichter Mengen ist offen und dicht.

Nun wird das Herleiten der Forcing-Technik zu einer *tour de force* im Sinne von Beweismarathon.

**Satz 7.26.** „Das Forcing\*theorem“. Seien  $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  wie gehabt, sei  $M$  ein ctm, sei  $P \in M$  eine Halbordnung, seien  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$  sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$ . Dann

- (1) Wenn  $p \in G$  und  $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n))^M$ , dann  $(\varphi(\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)^{M[G]}$ .
- (2) Wenn  $(\varphi(\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)^{M[G]}$ , dann gibt es ein  $p \in G$ , so dass  $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n))^M$ .

Beweis: Wenn  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  der atomare Ausdruck  $\tau_1 = \tau_2$  ist, dann wird der Beweis induktiv geführt, genauso wie die transfinite Rekursion in Definition  $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ . Da  $\Vdash^*$  für atomare Formeln absolut ist, kann also in der linken Seite von (1) die Relativierung auf  $M$  weglassen.

Wir nehmen nun also  $p \in G$  und  $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$  an. Zum Nachweis von  $(\tau_1)_G = (\tau_2)_G$  zeigen wir  $(\tau_1)_G \subseteq (\tau_2)_G$  mithilfe von  $(\alpha)$  der Definition  $\Vdash^*$  Punkt (a). Die andere Inklusion zeigt man in symmetrischer Weise. Jedes Element von  $(\tau_1)_G$  ist von der Form  $(\pi_1)_G$  für ein  $s_1 \in G$  und  $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ . Wir müssen  $(\pi_1)_G \in (\tau_2)_G$  zeigen. Wir geben ein  $r \in G$  mit  $r \leq p$  und  $r \leq s_1$  vor. Dann  $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$  nach Lemma 7.25. Nach der Definition von  $\Vdash^*$  ist  $\{q \leq r \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$  dicht unter  $r$  und nach Lemma 7.21 gibt es daher ein  $q \in G$  so dass  $q \leq r$  und  $q \leq s_1$  implizieren, dass

$$(\exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2)(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2). \quad (*)$$

Für  $\langle \pi_2, s_2 \rangle$  wie in  $(*)$  ist wegen  $q \leq s_2$ ,  $s_2 \in G$  und daher  $(\pi_2)_G \in (\tau_2)_G$ . Die Induktionsvoraussetzung von (1), angewandt auf  $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ , impliziert  $(\pi_1)_G = (\pi_2)_G$  und daher  $(\pi_1)_G \in (\tau_2)_G$ .

Nun prüfen wir (2) für  $\tau_1 = \tau_2$ : Sei  $(\tau_1)_G = (\tau_2)_G$ . Sei  $D$  die Menge aller  $r \in P$ , so dass  $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$  oder

$$(\alpha') \quad \left( \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \left( r \leq s_1 \wedge (\forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2) (\forall q \in P) ((q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \rightarrow q \perp r) \right) \right) \text{ oder}$$

$$(\beta') \quad \left( \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \left( r \leq s_2 \wedge (\forall \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1) (\forall q \in P) ((q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \rightarrow q \perp r) \right) \right).$$

Kein  $r \in G$  kann  $(\alpha')$  oder  $(\beta')$  erfüllen aus dem folgenden Grund: Wenn  $r \in G$  und  $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$  wie in  $(\alpha')$  ist, dann ist  $s_1 \in G$  und  $(\pi_1)_G \in (\tau_1)_G = (\tau_2)_G$ . Wir fixieren also ein  $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$  mit  $s_2 \in G$  und  $(\pi_1)_G = (\pi_2)_G$ , dann gibt es nach der Induktionsvoraussetzung von (2)  $\pi_1 = \pi_2$  ein  $p_0 \in G$ ,  $p_0 \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ . Nun nehmen wir ein  $q \in G$  mit  $q \leq p_0$  und  $q \leq s_2$ , da  $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ , haben wir  $r \perp q$ ,  $q \in G$ ,  $r \in G$ , einen Widerspruch.

Wir zeigen zunächst, dass  $D$  dicht ist. Sei  $p \in P$ . Entweder gilt  $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ , oder  $(\alpha)$  oder  $(\beta)$  von der Definition von  $\Vdash^*$  sind nicht wahr. Wenn  $(\alpha)$  nicht wahr ist, dann nehmen wir die Definition von „dicht unter  $p$ “ und ein  $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$  und ein  $r \leq p$ , so dass

$$(\forall q \leq r) \left( q \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \neg (q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \wedge q \leq s_2) \right). \quad (\odot)$$

Insbesondere ist  $r \leq s_1$ . Wenn  $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ ,  $q \leq s_2$  und  $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ , dann  $q \perp r$ , da jede gemeinsame Erweiterung  $q'$  von  $q$  und  $r$  der Zeile  $(\odot)$  widersprechen würde. So ist  $r \leq p$  und  $r$  erfüllt  $(\alpha')$ . Wenn  $(\beta)$  scheitert, dann erhalten wir ein  $r \leq p$  mit  $(\beta')$ . Also ist  $D$  dicht. Da  $G \cap D \neq \emptyset$  und  $(\alpha')$  und  $(\beta')$  beide ausgeschlossen sind, bleibt nur noch  $\exists r \in Gr \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ .

Nun nehmen wir an, dass  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  die atomare Formel  $\tau_1 \in \tau_2$  ist. Wir prüfen (1) und nehmen hierzu  $p \in G$  und  $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ . Dann ist

$$D = \{q \mid (\exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2)(q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)\}$$

dicht unter  $p$ . Wir nehmen also ein  $q \leq p$ ,  $q \in G$  und nehmen ein  $\langle \pi, s \rangle \in \tau_2$ , so dass  $q \leq s$  und  $q \Vdash^* \pi = \tau_1$ . Da  $s \in G$  und  $\langle \pi, s \rangle \in \tau_1$ , haben wir  $\pi_G \in (\tau_2)_G$  nach der Definition von  $(\tau_2)_G$ . Nun benutzen wir, dass wir (1) für Gleichheitsformeln schon bewiesen haben: Da  $q \in G$  und  $q \Vdash^* \pi = \tau_1$ , ist  $\pi_G = (\tau_1)_G$ . Also ist  $(\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$ .

Nun prüfen wir (2) für  $\tau_1 \in \tau_2$ . Wir nehmen  $(\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$  an. Nach der Definition von  $(\tau_2)_G$  gibt es ein  $\langle \pi, s \rangle \in \tau_2$ , so dass  $s \in G$  und  $\pi_G = (\tau_1)_G$ . Die Behauptung (2), angewandt auf die Formel  $\pi = \tau_1$ , liefert dann ein  $r \in G$ , so dass  $r \Vdash^* \pi = \tau_1$ . Sei nun  $p \in G$ ,  $p \leq s$  und  $p \leq r$ . Dann gilt  $p \Vdash^* \pi = \tau_1$  und daher  $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ .

Für die nicht atomaren Ausdrücke werden (1) und (2) jetzt beide zusammen über den Aufbau von  $\varphi$  bewiesen. Wir schreiben die  $\tau_i$  nicht.

(1)  $\neg$ : Wir nehmen (1) und (2) für  $\varphi$  an und beweisen (1) für  $\neg\varphi$ . Sei  $p \in G$  und  $(p \Vdash^* \neg\varphi)^M$ . Wir müssen  $\neg\varphi^{M[G]}$  zeigen. Im gegenteiligen Falle gälte  $\varphi^{M[G]}$ , und daher gäbe es nach (2) ein  $q \in G$ , so dass  $(q \Vdash^* \varphi)^M$ . Dann gäbe es ein  $r \in G$ ,  $r \leq p$  und  $r \leq q$  und  $(r \Vdash^* \varphi)^M$ , und dies widerspräche der Definition von  $(p \Vdash^* \neg\varphi)^M$ .

(2)  $\neg$ : Wir nehmen  $(\neg\varphi)^{M[G]}$  an und setzen

$$D = \{p \mid (p \Vdash^* \varphi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\varphi)^M\}.$$

$D \in M$  und  $D$  ist dicht nach der Definition des  $\neg$ -Schrittes in  $\Vdash^*$ , gelesen in  $M$ . Wir nehmen also ein  $p \in D \cap G$ . Das Disjunktionsglied  $p \Vdash^* \varphi$  ist nicht möglich, da  $p \Vdash^* \varphi$  nach der Induktionsvoraussetzung (1) für  $\varphi$  dann  $\varphi^{M[G]}$  implizieren würde.

(1)  $\wedge$ : Wir nehmen (1) für  $\varphi$  und  $\psi$  an und zeigen (1) für  $(\varphi \wedge \psi)$ . Sei  $p \in G$ ,  $p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$ . Dann  $p \Vdash^* \varphi$  und  $p \Vdash^* \psi$  und daher  $\varphi^{M[G]}$  und  $\psi^{M[G]}$  und daher  $(\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$ .

(2)  $\wedge$ : Wir nehmen  $(\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$  an. Nach (2) für  $\varphi$  und  $\psi$  gibt es  $p, q \in G$ , so dass  $p \Vdash^* \varphi$  und  $q \Vdash^* \psi$ . Jedes  $r$ , das stärker als beide ist, erzwingt die Konjunktion.

(1)  $\exists$ : Sei  $p \in G$  und  $(p \Vdash^* \exists x\varphi(x))^M$ . Dann ist  $\{r \mid (\exists \sigma \in M^P)(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M\}$  dicht unter  $p$  und eine Menge in  $M$ . Daher gibt es ein  $r \in G \cap D$ . Also gibt es ein  $\sigma \in M^P$  ( $r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$ . Nach der Induktionsvoraussetzung (1) für  $\varphi$  gilt  $\varphi(\sigma_G)^{M[G]}$ , somit  $(\exists x\varphi(x))^{M[G]}$ .

(2)  $\exists$ : Wir nehmen  $(\exists x\varphi(x))^{M[G]}$  an und halten ein  $\sigma \in M^P$  mit  $\varphi(\sigma_G)^{M[G]}$  fest. Nach (2) für  $\varphi$  gibt es ein  $p \in G$ ,  $(p \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$ . Dann gilt dies auch für alle  $r \leq p$ . Daher ist die Definition von  $(p \Vdash^* \exists x\varphi(x))^M$  (und mehr) erfüllt.  $\square$

**Satz 7.27.** „Der Hauptsatz über Forcing“, “the forcing theorem”. Sei  $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  wie gehabt.  $M$  ctm.  $P \in M$  Halbordnung.  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$ . Sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$ . Dann

(1) Für alle  $p \in P$  gilt

$$p \Vdash_M \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ gdw } (p \Vdash_M^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n))^M.$$

(2) Für alle  $P$ -generischen  $G$  über  $M$  gilt

$$(\varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G))^{M[G]} \text{ gdw } (\exists p \in G)(p \Vdash_M \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)).$$

Beweis: In (1) folgt die Implikation von rechts nach links aus (1) des Forcing\*-theorems und aus der Definition von  $\Vdash$ . Für die umgekehrte Implikation gelte  $p \Vdash \varphi(\bar{\tau})$ . Wir zeigen, dass  $\{r \mid (r \Vdash^* \varphi(\bar{\tau}))^M\}$  dicht unter  $p$  ist. Sonst gäbe es ein  $q \leq p$ , so dass kein  $r \leq q$  in  $D$  läge. Dann gälte  $(q \Vdash^* \neg\varphi(\bar{\tau}))^M$ . Nach (1) von rechts nach links hätten wir  $q \Vdash \neg\varphi(\bar{\tau})$ . Dann folgte nach der Definition von  $\Vdash$  für jedes  $G$  mit  $q \in G$ ,  $(\neg\varphi(\bar{\tau}_G))^{M[G]}$ . Doch da  $p \in G$  ist, gilt gleichzeitig  $(\varphi(\bar{\tau}_G))^{M[G]}$ . Widerspruch.

In (2) folgt die Implikation von rechts nach links aus der Definition von  $\Vdash$ . Die Implikation von links nach rechts folgt aus (1) und aus dem Forcing\*-theorem, das dieselbe Implikation für Forcing\* feststellt.  $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt mit vier nützlichen Eigenschaften der Relation  $\Vdash$ :

**Korollar 7.28.** Sei  $M$  transitiv, sei  $P \in M$  und seien  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$ . Dann gelten:

- (a)  $\{p \in P \mid p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \vee p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$  ist dicht.
- (b)  $p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  gdw für kein  $q \leq p$ ,  $q \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .
- (c)  $p \Vdash \exists x\varphi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$  gdw

$$\{r \mid (\exists \sigma \in \mathbf{V}^P)(r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n))\}$$

dicht unter  $p$  ist.

- (d) Wenn  $p \Vdash (\exists x \in \sigma)\varphi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$ , dann

$$(\exists q \leq p)(\exists \pi \in \text{dom}(\sigma))(q \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)).$$

Beweis: (a) bis (c) sind für  $\Vdash^*$  wahr nach der Definition von  $\Vdash^*$ , und nach dem Teil (1) des Hauptsatzes gelten sie dann auch für  $\Vdash$ . Für (d) halten wir ein generisches  $G$  mit  $p \in G$  fest. Nach der Definition von  $\Vdash$  gibt es ein  $a \in \sigma_G$ , so dass  $M[G] \models \varphi(a, \bar{\tau})$ , und  $a = \pi_G$  für ein  $\pi \in \text{dom}(\sigma)$ . Nach dem Hauptsatz (in der schwierigen Richtung) gibt es ein  $r \in G$ ,  $r \Vdash \varphi(\pi, \bar{\tau})$ . Wir nehmen  $q \in G$ ,  $q \leq p$  und  $q \leq r$ .  $\square$

## 7.5 ZFC\* in $M[G]$

**Lemma 7.29.** AC, hier in der Form des Wohlordnungssatzes, folgt aus

$$(\forall x)(\exists \alpha \in \mathbf{On})(\exists f)(f: \alpha \rightarrow \text{rge}(f) \wedge x \subseteq \text{rge}(f)).$$

Beweis: Wir zeigen, dass jede Menge  $x$  wohlgeordnet werden kann. Wir setzen  $g(z) = \min(f^{-1}\{z\})$  für  $z \in x$ . Dann ist  $g: x \rightarrow \alpha$  injektiv. Nun setzen wir  $yRz \leftrightarrow g(y) < g(z)$ . Dann ist  $R$  eine Wohlordnung auf  $x$ .  $\square$

**Satz 7.30.** („ $M[G]$  erfüllt ZFC“) Sei ZFC\* ein endliches Fragment von ZFC. Dann gibt es ein endliches Fragment  $T(\text{ZFC}^*)$ , so dass für alle transitiven Modelle  $M$  gilt

$$M \models T(\text{ZFC}^*) \rightarrow M[G] \models \text{ZFC}^*.$$

Beweis: Die Axiome Ext, Fund, Paar und Ver haben wir schon in Lemma 7.20 gezeigt. Wir prüfen einen Satz aus dem Aussonderungsschema: Sei  $\varphi(x, v, \bar{y})$  eine Formel. Wir möchten zeigen, dass für alle  $\sigma, \bar{\tau} \in M^P$  gilt:

$$\{a \in \sigma_G \mid (\varphi(a, \sigma_G, \bar{\tau}_G))^{M[G]}\} \in M[G].$$

Nun fordern wir in  $M$  das Aussonderungsschema für die Formel in folgender Menge (!):

$$\rho = \{\langle \pi, p \rangle \in \text{dom}(\sigma) \times P \mid p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \bar{\tau}))\} \in M.$$

Da  $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \bar{\tau}))$  gdw  $(p \Vdash^* (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \bar{\tau}))^M)$ , folgt die Existenz von  $\rho$  aus dem Aussonderungsschema für diese Formel in  $M$ . Außerdem sei  $M$  gegen  $\times$  abgeschlossen, hierzu braucht man das Paarmengenaxiom und eine Instanz des Ersetzungsschemas. So bestimmt sich also  $T(\text{Aus}_\varphi)$ .

Nun rechnet man nach, dass  $\rho_G = \{a \in \sigma_G \mid (\varphi(a))^{M[G]}\}$ . Wir unterdrücken die Parameter  $\bar{\tau}$  für den Rest der Herleitung. Zunächst die leichte Inklusion: Jedes Element von  $\rho_G$  ist von der Form  $\pi_G$  für  $\langle \pi, p \rangle \in \rho$  und  $p \in G$ . Dann gilt nach der Definition von  $\rho$ ,  $p \Vdash \pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma)$ , und daher nach der Definition von  $\Vdash$ ,  $\pi_G \in \sigma_G$  und  $(\varphi(\pi_G, \sigma_G))^{M[G]}$ . Nun zur anderen Inklusion: Sei  $a \in \sigma_G$  und gelte  $\varphi(a, \sigma_G)^{M[G]}$ . Nach (2) des Hauptsatzes gibt es ein  $p \in G$ , so dass  $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma))$ . Also ist  $\langle \pi, p \rangle \in \rho$  und  $\pi_G \in \rho_G$ .

Wir prüfen nun einen Satz aus dem Ersetzungsschema: sei  $\varphi(x, v, \bar{z})$  eine Formel. Wir möchten zeigen, dass es zu  $\sigma, \bar{\tau} \in M^P$  einen Namen  $\rho_G$  gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$((\forall a \in \sigma_G)(\exists^{=1} y)(\varphi(a, y, \bar{\tau}_G)))^{M[G]}$$

impliziert

$$((\forall a \in \sigma_G)(\exists y \in \rho_G)(\varphi(a, y, \bar{\tau}_G)))^{M[G]}.$$

Nun fordern wir in  $M$  das Ersetzungsschema Ers' für die Formel über  $M$ :

$$\begin{aligned} (\forall \pi \in \text{dom}(\sigma))(\forall p \in P)(\exists \mu \in M^P)(p \Vdash \varphi(\pi, \mu)) \\ \rightarrow (\forall \pi \in \text{dom}(\sigma))(\forall p \in P)(\exists \mu \in S)(p \Vdash \varphi(\pi, \mu)). \end{aligned}$$

Da  $p \Vdash \varphi(\pi, \mu)$  gdw  $(p \Vdash^* \varphi(\pi, \mu))^M$ , ist dies wirklich die Anwendung des Ersetzungsaxioms in der Form ohne die Bedingung „es gibt genau eines“ in der Voraussetzung für eine Formel in  $M$ . Sei  $\psi(x, y) = \psi(p, \pi, \mu) = p \Vdash \varphi(\pi, \mu)$ ,  $x = (p, \pi)$ ,  $y = \mu$ .

Nun haben wir noch zu klären, ob diese scheinbar stärkere Variante wirklich aus ZFC folgt: Sei  $\text{Ers}'_\psi$

$$(\forall x \in s)(\exists y)\psi(x, y) \rightarrow \exists S(\forall x \in s)(\exists y \in S)\varphi(x, y).$$

Dies wurde in Satz 5.9 (Kollektionsprinzip) gezeigt.

$\text{Ers}'_\varphi$  folgt wie folgt aus der Originalform von Ers, dem Vereinigungsmengenaxiom, dem Fundierungsaxiom, denn für ein geeignetes  $\tilde{\psi}$  lautet  $\text{Ers}'_{\tilde{\psi}} = \text{Ers}'_\psi$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & (\forall x \in s)(\exists^=1 z)(z = V_{m(x)} \wedge m(x) = \min\{\alpha \mid \exists y \in V_\alpha \psi(x, y)\}) \rightarrow \\ & (\exists R)(\forall x \in s)(\exists z \in R)(z = V_{m(x)} \wedge m(x) = \min\{\alpha \mid \exists y \in V_\alpha \psi(x, y)\}). \end{aligned}$$

Dann nimmt man  $\bigcup R \subseteq S$  und hat eine Menge  $S$  wie in  $\text{Ers}'_\psi$  gefordert. So bestimmt sich also  $T(\text{Ers}_\varphi)$ .

Also gibt es  $S \in M$ . Wir setzen  $\rho = (S \cap M^P) \times \{1\}$ . Dann ist  $\rho_G = \{\mu_G \mid \mu \in S\}$ . Sei  $x \in \sigma_G$ . Wir zeigen  $(\exists y \in \rho_G)(\varphi(x, y))^{M[G]}$ .  $x = \pi_G$  für ein  $\pi \in \text{dom}(\sigma)$ . Da  $M[G] \models \exists y \varphi(\pi_G, y)$ , gibt es ein  $\nu \in M^P$ ,  $M[G] \models \varphi(\pi_G, \nu_G)$ . Nach dem Hauptsatz gibt es ein  $p \in G$ ,  $p \Vdash \varphi(\pi, \nu)$ , also  $\psi(p, \mu, \pi)$ . Nun gibt es nach unserer Wahl von  $S$  auch ein  $\mu \in S$  mit  $p \Vdash^* \varphi(\pi, \mu)$  daher und  $\mu_G \in \rho_G$  und  $(\varphi(\pi_G, \mu_G))^{M[G]}$ .

Unendlichkeitsaxiom: Wir fordern, dass in  $M$  das Unendlichkeitsaxiom und das Paarmengenaxiom und das Ersetzungsaxiom für  $x \mapsto \check{x}$  gelten. Dann haben wir  $\omega = \check{\omega}_G \in M[G]$ .

Potenzmengenaxiom: Wir fordern das Potenzmengenaxiom in  $M$ . Außerdem sei  $M$  gegen  $\times$  abgeschlossen, hierzu braucht man das Paarmengenaxiom und eine Instanz des Ersetzungsschemas. Sei  $\sigma_G \in M[G]$ . Sei

$$S = \{\tau \in M^P \mid \text{dom}(\tau) \subseteq \text{dom}(\sigma)\} = (\mathcal{P}(\text{dom}(\sigma) \times P))^M.$$

Wir setzen  $\rho = S \times \{1\}$  und rechnen nach, dass für alle  $\mu_G \subseteq \sigma_G$ ,  $\mu_G \in \rho_G$ . Wir setzen

$$\tau = \{\langle \pi, p \rangle \mid \pi \in \text{dom}(\sigma) \wedge p \Vdash \pi \in \mu\}.$$

Dann ist  $\tau \in S$  und daher  $\tau_G \in \rho_G$ . Wir zeigen nun, dass  $\mu_G = \tau_G$  ist, dies wird den Beweis beenden.

Wir zeigen  $\mu_G \subseteq \tau_G$ . Jedes Element von  $\mu_G$  ist in  $\sigma_G$  und daher von der Form  $\pi_G$  für ein  $\pi \in \text{dom}(\sigma)$ . Da  $\pi_G \in \mu_G$ , gibt es ein  $p \in G$ ,  $p \Vdash \pi \in \mu$  und daher ist  $\langle \pi, p \rangle \in \tau$  und  $\pi_G \in \tau_G$ . Für die Inklusion  $\tau_G \subseteq \mu_G$  bemerken wir, dass jedes Element von  $\tau_G$  von der Form  $\pi_G$  ist mit  $\langle \pi, p \rangle \in \tau$  und  $p \in G$ . Dann gilt  $p \Vdash \pi \in \mu$  und daher  $\pi_G \in \mu_G$ .

AC. Wir fordern, dass  $M$  den Satz aus der Voraussetzung des Lemmas 7.29 erfüllt. Außerdem sei  $M$  gegen geordnete Paare abgeschlossen, hierzu braucht

man das Paarmengenaxiom. Damit beweisen wir AC in  $M[G]$ . Sei  $x = \sigma_G \in M[G]$ . Wir wenden die Voraussetzung an auf  $\text{dom}(\sigma) = \{\pi_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$  und erhalten eine surjektive Aufzählungsfunktion  $\{\langle \gamma, \pi_\gamma \rangle \mid \gamma < \alpha\} \in M$ . Wir setzen

$$\tau = \{\text{op}(\check{\gamma}, \pi_\gamma) \mid \gamma < \alpha\} \times \{1\}.$$

Dann ist  $\tau \in M^P$  und  $\tau_G = \{\langle \gamma, (\pi_\gamma)_G \rangle \mid \gamma < \alpha\}$ . Also ist  $\tau_G$  eine Funktion mit  $\text{dom}(\tau_G) = \alpha$  und  $\sigma_G \subseteq \text{rge}(\tau_G)$ .

Zusammenfassung: Man kann für jedes Axiom  $\varphi$  von ZFC ein Axiom  $\varphi'$  von ZFC angeben, so dass

$$M \models \varphi' \rightarrow M[G] \models \varphi.$$

□

ÜBUNG: Die Klasse aller  $\mu$ , so dass  $\mu_G \subseteq \sigma_G$ , ist normalerweise eine echte Klasse, so wie auch die Klasse aller  $\sigma$ , so dass  $\sigma_G = \mu_G$ , eine echte Klasse ist. Jedes Element in  $M[G]$  hat also Klassen-viele Namen.

**Lemma 7.31.** (a) Seien  $\varphi(\bar{x})$  und  $\psi(\bar{x})$   $\mathcal{L}(\in)$ -Formeln, sei ZFC\* ein endliches Fragment von ZFC und gelte

$$\text{ZFC}^* \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})). \quad (7.1)$$

Dann gilt für jedes ctm  $M \models T(\text{ZFC}^*)$  und für alle Halbordnungen  $P \in M$ ,  $p \in P$ ,  $\bar{\tau} \in M^P$ :

$$(p \Vdash_M \varphi(\bar{\tau})) \rightarrow (p \Vdash_M \psi(\bar{\tau})).$$

(b) Nun nehmen wir zusätzlich an, dass

$$\text{ZFC}^* \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

Dann gilt für jedes ctm  $M \models T(\text{ZFC}^*)$  und für alle Halbordnungen  $P \in M$ ,  $p \in P$ ,  $\bar{\tau} \in M^P$ :

$$(p \Vdash_M \varphi(\bar{\tau})) \leftrightarrow (p \Vdash_M \psi(\bar{\tau})).$$

Beweis: Wir wählen ein  $M \models T(\text{ZFC}^*)$ . Sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$  und sei  $p \in G$ . Dann gilt  $M[G] \models \text{ZFC}^*$ . In  $M[G]$  gilt dann auch:  $\varphi(\bar{\tau}_G)^{M[G]} \rightarrow \psi(\bar{\tau}_G)^{M[G]}$ . Nach der Definition von  $p \Vdash_M \psi(\bar{\tau})$  haben wir  $p \Vdash_M \psi(\bar{\tau})$ . □

**Korollar 7.32.**  $\text{ZF} \vdash \text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L})$ .

*Proof.* Da  $M \cap \mathbf{On} = M[G] \cap \mathbf{On}$ , ist  $\mathbf{L}^M = \mathbf{L}^{M[G]} \subseteq M$ . Sei  $P$  splitting. Dann ist  $G \notin M$ . Also ist  $G \in M[G] \setminus \mathbf{L}^{M[G]}$ . □



## Kapitel 8

# Die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese

### 8.1 $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \neg\text{CH})$ , die relative Konsistenz des Negats der Kontinuumshypothese

Nun nehmen wir an, dass  $M$  alle Einzel-Axiome von ZFC und noch endliche Teile der beiden Schemata erfüllt. Wir führen nicht mehr Buch über die erforderlichen Fragmente, sondern schreiben nur noch Eigenschaften von  $P$ , der beteiligten Kardinalzahlen und anderer Parameter nieder. Sehr oft wird zum Beispiel in  $M$  eine Vereinigungsmenge gebildet. Lemma 7.31 wird ständig stillschweigend benutzt.

**Definition 8.1.** Sei  $\lambda$  eine unendliche Kardinalzahl,  $I, J$  Mengen.

$$\text{Fn}(I, J, \lambda) = \{p \mid |p| < \lambda \wedge p \text{ ist eine Funktion} \wedge \text{dom}(p) \subseteq I \wedge \text{rge}(p) \subseteq J\}.$$

Wir halbordnen  $\text{Fn}(I, J, \lambda)$  durch  $q \leq p$  gdw  $q \supseteq p$ .

**Lemma 8.2.** Seien  $\lambda, I, J \in M$  und gelte ( $\lambda$  ist eine Kardinalzahl) <sup>$M$</sup>  und  $J \neq \emptyset$  und  $(|I| \geq \lambda)^M$  und sei  $G$   $(\text{Fn}(I, J, \lambda))^M$ -generisch über  $M$ . Dann ist  $\bigcup G \in M[G]$  eine Funktion von  $I$  auf  $J$ .  $|J|$  wird also womöglich kollabiert.  $\square$

Anwendung mit  $\lambda \leq \kappa = |I| \geq \mu = |J|$  liefert  $\kappa \geq \mu$  in  $M[G]$ , da es ja dort eine Surjektion von  $\kappa$  auf  $\mu$  gibt. Aber bleibt  $\mu$  eine Kardinalzahl?  $M[G] \supseteq M$ , und Kardinalzahlen bleiben nur abwärts erhalten. Für  $\mu = \omega$  ist das wahr, da  $\omega$  auch in  $M[G]$  unendlich ist. Außerdem wollen wir den Fall sehr kleiner  $|J|$  betrachten.

**Definition 8.3.** Eine Halbordnung hat die c.c.c. (countable chain condition) oder ist c.c.c., gdw alle ihre Antiketten abzählbar sind.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>„Abzählbare Antiketteneigenschaft“ ist wie „fünfköpfiger Familienvater“ im Deutschen nicht möglich, da das Attribut sich immer auf die letzte Komponente eines Kompositums bezieht.

**Definition 8.4.** Eine Familie  $\mathcal{A}$  von Mengen heißt  $\Delta$ -System gdw es eine feste Menge  $r$ , Wurzel oder Kern <sup>2</sup> genannt, gibt, so dass für je zwei verschiedene  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $a \cap b = r$ .

**Lemma 8.5.** „Das  $\Delta$ -System-Lemma“. Sei  $\mathcal{A}$  eine überabzählbare Familie endlicher Mengen. Dann gibt es ein überabzählbares  $\Delta$ -System  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ .

Das Lemma ist ein Spezialfall (—ÜBUNG: Welcher?—) des folgenden Satzes:

**Satz 8.6.** Der  $\Delta$ -System-Satz. Sei  $\kappa$  eine unendliche Kardinalzahl. Sei  $\theta > \kappa$  regulär und gelte  $(\forall \alpha < \theta)(|\alpha|^{<\kappa} < \theta)$ . Sei  $|\mathcal{A}| \geq \theta$  und sei  $(\forall x \in \mathcal{A})(|x| < \kappa)$ . Dann gibt es ein  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ , so dass  $|\mathcal{B}| = \theta$  und  $\mathcal{B}$  ein  $\Delta$ -System ist.

Beweis: Wir nehmen an, dass  $|\mathcal{A}| = \theta$  ist. Falls  $\mathcal{A}$  zu groß ist, kann man eine Teilmenge der Mächtigkeit  $\theta$  wählen. Außerdem nehmen wir an, dass  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \theta$ , weil der individuelle Charakter der Elemente von  $\mathcal{A}$  keine Rolle spielt. Dann hat jedes  $x \in \mathcal{A}$  zusammen mit der Einschränkung der Wohlordnung von  $\theta$  auf  $x$  einen Wohlordnungstyp  $\text{otp}(x) < \kappa$ . Da  $\theta$  regulär und echt größer  $\kappa$  ist, gibt es ein  $\rho < \kappa$ , so dass  $\mathcal{A}_1 = \{x \in \mathcal{A} \mid \text{otp}(x) = \rho\}$  die Mächtigkeit  $\theta$  hat. Nun halten wir so ein  $\rho$  fest und arbeiten nur noch mit  $\mathcal{A}_1$  weiter.

Für jedes  $\alpha < \theta$  gilt  $|\alpha|^{<\kappa} < \theta$ . Dies impliziert, dass für jedes  $\alpha < \theta$  strikt weniger als  $\theta$  Elemente von  $\mathcal{A}_1$  Teilmengen von  $\alpha$  sind. Also ist  $\bigcup \mathcal{A}_1$  unbeschränkt in  $\theta$ . Für  $x \in \mathcal{A}_1$  und  $\xi < \rho$  sei  $x(\xi)$  das  $\xi$ -te Element von  $x$ . Da  $\theta$  regulär ist, gibt es ein  $\xi$ , so dass  $\{x(\xi) \mid x \in \mathcal{A}_1\}$  unbeschränkt in  $\theta$  ist. Wir halten das kleinste  $\xi$  mit dieser Eigenschaft fest und nennen es  $\xi_0$ . Sei

$$\alpha_0 = \sup\{x(\eta) + 1 \mid x \in \mathcal{A}_1 \wedge \eta < \xi_0\}.$$

Dann ist  $\alpha_0 < \theta$  und  $x(\eta) < \alpha_0$  für alle  $x \in \mathcal{A}_1$  und alle  $\eta < \xi_0$ .

Durch transfinite Rekursion über  $\mu < \theta$  wählen wir  $x_\mu \in \mathcal{A}_1$ , so dass  $x_\mu(\xi_0) > \alpha_0$  und  $x_\mu(\xi_0)$  über allen Elementen früherer  $x_\nu$  liegt, d.h.,

$$x_\mu(\xi_0) \geq \max(\alpha_0, \sup\{x_\nu(\eta) \mid \eta < \rho \wedge \nu < \mu\}).$$

Dann setzen wir  $\mathcal{A}_2 = \{x_\mu \mid \mu < \theta\}$ . Dann ist  $|\mathcal{A}_2| = \theta$  und  $x \cap y \subseteq \alpha_0$  für alle  $x \neq y \in \mathcal{A}_2$ . Da  $\alpha_0^{<\kappa} < \theta$ , gibt es ein  $r \subseteq \alpha_0$  und ein  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_2$ , so dass  $|\mathcal{B}| = \theta$  und  $(\forall x \in \mathcal{B})x \cap \alpha_0 = r$ . Also ist  $\mathcal{B}$  ein  $\Delta$ -System mit Wurzel  $r$ .  $\square$

**Lemma 8.7.** Falls  $|J| \leq \omega$ , so hat  $\text{Fn}(I, J, \omega)$  die c.c.c.

Beweis: Seien  $p_\alpha$ ,  $\alpha < \omega_1$ , Bedingungen, und sei  $a_\alpha = \text{dom}(p_\alpha)$ . Nach dem  $\Delta$ -System-Lemma gibt es ein überabzählbares  $X \subseteq \omega_1$ , so dass  $\{a_\alpha \mid \alpha \in X\}$  ein  $\Delta$ -System bildet. Sei  $r$  dessen Wurzel. Da  $J$  abzählbar ist, gibt es nur abzählbar viele Möglichkeiten für  $p_\alpha \upharpoonright r$ . Wir nehmen also (mit  $\text{AC}_\omega$ ) ein überabzählbares  $Y \subset X$  und ein  $u$ , so dass für  $\alpha \in Y$ ,  $p_\alpha \upharpoonright r = u$ . Dann sind alle  $p_\alpha$ ,  $\alpha \in Y$ , paarweise kompatibel oder sogar endlich viel von ihnen haben einen Schnitt (man nennt eine Menge von Bedingungen mit dieser Eigenschaft „zentriert“).

<sup>2</sup>Shelah sagt „Herz“.

Dies ist übrigens die Knaster-Eigenschaft: <sup>3</sup> zu  $\omega_1$  Bedingungen gibt es eine Teilmenge der Mächtigkeit  $\omega_1$ , die zentriert ist. Die Knaster-Eigenschaft ist i.A. echt stärker als die c.c.c.-Eigenschaft). Also konnten die  $p_\alpha$ ,  $\alpha < \omega_1$ , keine Antikette bilden.  $\square$

**Lemma 8.8.** *Sei  $P \in M$  eine (c.c.c.-Halbordnung)<sup>M</sup>. Seien  $A, B \in M$  und sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$  und sei  $f \in M[G]$ ,  $f: A \rightarrow B$ . Dann gibt es eine Abbildung  $F: A \rightarrow \mathcal{P}^M(B)$ , so dass  $F \in M$  und  $(\forall a \in A)(f(a) \in F(a))$  und  $(\forall a \in A)(|F(a)| \leq \omega)^M$ .*

Beweis: Wir halten  $\tau \in M^P$  fest, so dass  $f = \tau_G$ . Da jede Aussage, die in  $M[G]$  wahr ist, nach dem Hauptsatz erzwungen wird, gibt es ein  $p \in G$ , so dass

$$p \Vdash \tau \text{ ist eine Funktion von } \check{A} \text{ nach } \check{B}.$$

Dies ist wirklich eine Formel aus der Forcingsprache. Nun definieren wir

$$F(a) = \{b \in B \mid (\exists q \leq p)(q \Vdash \tau(a) = b)\}.$$

$F \in M$  nach der Definierbarkeit von  $\Vdash$  in  $M$  (dies folgt aus dem Forcing\*satz).

Nun halten wir ein  $a \in A$  fest. Wir zeigen  $f(a) \in F(a)$ . Sei  $b = f(a)$ . Dann gibt es ein  $r \in G$ ,  $r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$  und  $r$  und  $p$  haben einen Schnitt in  $G$ , sei er  $q$ . Dann  $q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$ . Also ist  $b \in F(a)$ .

Um zu sehen, dass  $(|F(a)| \leq \omega)^M$ , wenden wir AC in  $M$  an, um eine Funktion  $Q$  in  $M$  zu finden, so dass  $Q: F(a) \rightarrow P$  und für alle  $b \in F(a)$ ,

$$(Q(b) \leq p \text{ und } Q(b) \Vdash \tau(a) = b).$$

Wenn  $b, b' \in F(a)$  und  $b \neq b'$ , dann sind  $Q(b)$  und  $Q(b')$  inkompatibel, weil  $\tau$  eine Funktion ist und weil  $Q(b)$  und  $Q(b')$  verschiedene Werte für dasselbe Argument  $a$  erzwingen. Also ist  $\{Q(b) \mid b \in F(a)\} \in M$  eine Antikette in  $P$  und da  $Q \in M$  ist und  $(P \text{ ist c.c.c.})^M$ , gilt, dass  $(|F(a)| \leq \omega)^M$ .  $\square$

**Definition 8.9.**  $P(= (P, \leq_P))$  erhält Kardinalzahlen gdw für alle  $P$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  gilt

$$(\forall \beta \in \mathbf{On} \cap M)((\beta \text{ ist eine Kardinalzahl})^M \leftrightarrow (\beta \text{ ist eine Kardinalzahl})^{M[G]}).$$

**Definition 8.10.**  $P(= (P, \leq_P))$  erhält Konfinalitäten gdw für alle  $P$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  gilt

$$(\forall \beta \in \mathbf{On} \cap M)(\beta \text{ Limesordinalzahl} \rightarrow \text{cf}(\beta)^M = \text{cf}(\beta)^{M[G]}).$$

**Lemma 8.11.** *Wenn  $P$  Konfinalitäten erhält, so auch Kardinalitäten.*

<sup>3</sup>Nach dem Wroclawer Mathematiker Boris Knaster, Arbeit in den 1940er Jahren

Beweis: Wir nehmen an, dass  $P$  Konfinalitäten erhält. Wenn  $\alpha \geq \omega$  eine reguläre Kardinalzahl in  $M$  ist, dann ist  $\text{cf}(\alpha)^M = \text{cf}(\alpha)^{M[G]} = \alpha$ . Also ist  $\alpha$  auch eine reguläre Kardinalzahl in  $M[G]$ . Wenn  $\beta > \omega$  eine Limeskardinalzahl in  $M$  ist, dann sind die Nachfolgerkardinalzahlen unbeschränkt in  $\beta$ , und diese bleiben regulär in  $M[G]$ , weil Konfinalitäten erhalten bleiben. Also ist  $\beta$  eine Limeskardinalzahl in  $M[G]$ . Weil jede unendliche Kardinalzahl regulär ist oder eine Limeskardinalzahl ist oder beide Eigenschaften hat, ist nun also jede unendliche Kardinalzahl in/von  $M$  auch eine Kardinalzahl in/von  $M[G]$ .  $\square$

**Lemma 8.12.** *Wenn  $P$  die Eigenschaft „ $\kappa$  ist regulär“ erhält, dann erhält  $P$  Konfinalitäten.*

Beweis: Sei  $\gamma$  eine Limesordinalzahl in  $M$  und sei  $(\kappa = \text{cf}(\gamma))^M$ . Aus  $M \subseteq M[G]$  und aus deren Transitivität folgt  $\text{cf}(\gamma)^M \geq \text{cf}(\gamma)^{M[G]}$ , da die Definition von Konfinalität nur einen nicht-absoluten Existenzquantor enthält.

Nach einem alten Lemma über äquivalente Definitionen der Konfinalität gibt es ein  $f \in M$ , das  $\kappa$  konfinal nach  $\gamma$  abbildet und streng monoton wachsend ist. Aus  $(\kappa \text{ regulär})^M$  folgt nach Voraussetzung  $(\kappa \text{ ist regulär})^{M[G]}$ . Falls nun  $\text{cf}(\gamma)^{M[G]} < \text{cf}(\gamma)^M = \kappa$  wäre, so gäbe es in  $M[G]$  eine konfinale Abbildung  $g: \text{cf}(\gamma)^{M[G]} \rightarrow \kappa$  (nicht nur zu  $\gamma$ ).

ÜBUNG: Bauen Sie  $g$  aus  $f$  und einem Zeugen für  $(\text{cf}(\gamma) < \kappa)^{M[G]}$ .

Dies widerspräche der Regularität von  $\kappa$  in  $M[G]$ .  $\square$

**Satz 8.13.** *Wenn  $(P \text{ hat die c.c.c.})^M$ , dann erhält  $P$  Konfinalitäten.*

Beweis: Sonst gibt es ein  $\kappa \in M$ , das in  $M$  regulär ist und in  $M[G]$  singular ist. Dann gibt es ein  $f \in M[G]$ , das ein  $\alpha < \kappa$  konfinal nach  $\kappa$  abbildet. Nach dem Lemma über  $F$  gibt es ein  $F: \alpha \rightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ ,  $F \in M$ , so dass  $(\forall \xi < \alpha)(f(\xi) \in F(\xi))$  und  $(\forall \xi < \alpha)(|F(\xi)| \leq \omega)^M$ . Wir setzen  $S = \bigcup_{\xi < \alpha} F(\xi)$ . Dann ist  $S \in M$  und  $S$  ist unbeschränkt in  $\kappa$ .  $(|S| = |\alpha| < \kappa)^M$  widerspricht nun der Tatsache, dass  $\kappa$  in  $M$  regulär ist.  $\square$

**Lemma 8.14.** *Wenn  $\kappa \in M$  und wenn  $G \text{ Fn}(\kappa \times \omega, 2, \omega)$ -generisch über  $M$  ist, dann ist  $(2^\omega \geq |\kappa|)^{M[G]}$ .*

Beweis:  $f_\alpha(n) = (\bigcup G)(\alpha, n)$ .

$$D_{\alpha, \beta} = \{p \in P \mid (\exists n < \omega)(\langle \alpha, n \rangle \in \text{dom}(p) \wedge \langle \beta, n \rangle \in \text{dom}(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}$$

ist dicht in  $P$  und in  $M$ . Also ist  $G \cap D_{\alpha, \beta} \neq \emptyset$ . Hieraus folgt  $f_\alpha \neq f_\beta$ . Also gibt es in  $M[G]$  eine  $\kappa$ -Folge von paarweise verschiedenen Funktionen  $f_\alpha$  von  $\omega$  nach 2.  $\square$

Nun nehmen wir  $\kappa = \omega_2$  von  $M$ . Da  $P$  c.c.c. in  $M$  ist, haben wir  $\kappa = \omega_2$  auch in  $M[G]$ . Wir haben also

**Satz 8.15.** *Cohen, 1963.  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + 2^\omega \geq \omega_2)$ .*

## 8.2 Die relative Konsistenz von CH

Wir nehmen nun die Halbordnung  $(\text{Fn}((\omega_1)^M, (\omega^\omega)^M, (\omega_1)^M))^M$  und erhalten damit einen Forcingbeweis von Gödels Satz:

**Satz 8.16.** *Cohen, 1963.*  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \text{CH})$ .

Beweis: Wir erweitern mit  $(\text{Fn}((\omega_1)^M, (2^\omega)^M, (\omega_1)^M))^M$ .  $P$  ist in  $M$  unter absteigenden Ketten abzählbarer Länge abgeschlossen, und daher gibt es keine neuen Funktionen  $f: \omega \rightarrow \kappa$ ,  $f \in M[G] \setminus M$ .  $(\omega_1)^M$  bleibt daher in  $M[G]$  die erste überabzählbare Kardinalzahl. Die generische Funktion  $\bigcup G$  ist eine Surjektion von  $\omega_1$  auf  $(2^\omega)^M = (2^\omega)^{M[G]}$ , wie man mit einem sogenannten Dichtheitsargument zeigt: Sei  $r \in (2^\omega)^M$ , dann ist

$$D_r = \{p \in P \mid r \in \text{rge}(p)\}$$

eine dichte Teilmenge von  $P$ , die in  $M$  liegt. □



## Kapitel 9

# Die relative Konsistenz von $\neg\text{AC}$

Mit dem konstruktiblen Universum  $\mathbf{L}$ , einem sogenannten inneren Modell, zeigen wir  $\text{Con}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC})$ . Nun zeigen wir  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZF} + \neg\text{AC})$ .

In unserem Modell von  $\neg\text{AC}$  wird es eine unendliche Menge von Zweiermengen geben, zu der es keine Auswahlfunktion gibt. In diesem Kapitel folgen wir T. Jech, *Set Theory. Second corrected edition*, Springer, 1997, Seite 190 – 210. Es gibt inzwischen auch die dritte Auflage “The Third Millenium Edition” von 2003. Aber auch die erste Auflage von 1978 [15] genügt, weil das Neue in Kapiteln dazugekommen ist, die von unserer Vorlesung (noch) nicht berührt werden.

**Definition 9.1.**  $f: P \rightarrow P$  heißt *Automorphismus von  $P$* , wenn  $f$  eine Bijektion ist und für alle  $q, p$  gilt

$$p \leq q \leftrightarrow f(p) \leq f(q).$$

Bemerkung: Wenn  $G$   $P$ -generisch über  $M$  ist und  $f$  ein Automorphismus von  $P$  ist, dann ist  $f[G] = f''G$   $P$ -generisch über  $M$ .

Nun setzen wir  $f$  auf  $V^P$  fort durch folgende rekursive Definition.

**Definition 9.2.**  $\bar{f}(\tau) = \{\langle \bar{f}(\sigma), f(p) \rangle \mid \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}$ .

Bemerkung:  $\bar{f}$  ist bijektiv und  $\bar{f}(\check{x}) = \check{x}$  and  $\bar{f} \circ \bar{g} = (f \circ g)$  and  $\text{id}_P = \text{id}_{V^P}$ .

**Lemma 9.3.** (1)  $\text{val}(\tau, G) = \text{val}(\bar{f}(\tau), f''G)$ ,  $M[G] = M[f''G]$ .

(2)  $p \Vdash \varphi(\bar{\tau}) \leftrightarrow f(p) \Vdash \varphi(\bar{f}(\bar{\tau}))$ .

**Definition 9.4.** Sei  $F$  eine Gruppe von Automorphismen von  $P$ . Ein Name  $\tau$  heißt  $F$ -invariant, wenn  $\bar{f}(\tau) = \tau$  für alle  $f \in F$ . Ein Filter  $\mathcal{F}$  auf  $F$  ist eine Teilmenge von

$$\{H \mid H \text{ Untergruppe von } F\}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

- (a)  $F \in \mathcal{F}$ ,
- (b)  $\forall G \in \mathcal{F} \forall H (H \text{ Obergruppe von } G \text{ und Untergruppe von } F) (H \in \mathcal{F})$ ,

$$(c) \quad \forall G, H \in \mathcal{F} (G \cap H) \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$  heißt normal, wenn  $\mathcal{F}$  abgeschlossen unter Konjugationen mit allen  $f \in F$ , d.h.,  $\forall F \in \mathcal{F} \forall f \in F (fFf^{-1} \in \mathcal{F})$ , ist.

**Definition 9.5.**  $\tau$  heißt erblich symmetrisch (bezüglich  $\mathcal{F}$ ), wenn folgendes gilt:

- (1) es gibt ein  $F \in \mathcal{F}$ , so dass  $\tau$   $F$ -invariant ist, und
- (2) für alle  $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$  ist  $\sigma$  erblich symmetrisch.

Bei anderen Autoren heißt dieser Begriff auch  $\mathcal{F}$ -invariant.

Wenn  $\tau$  erblich symmetrisch ist und  $f \in F$ , dann ist  $\bar{f}(\tau)$  erblich symmetrisch, da  $\mathcal{F}$  normal ist.

**Definition 9.6.**

$$M_{\mathcal{F}}[G] = \{\tau_G \mid \tau \text{ ist erblich symmetrisch}\}.$$

**Satz 9.7.**  $M_{\mathcal{F}}[G]$  ist eine transitive Erweiterung von  $M$  und erhält ZF im Sinne von Satz 7.30.

Beweis: Von Definition 7.6 bis zu Satz 7.30 hin ist nun alles für erblich symmetrische Namen durchzuführen. Man kann  $\Vdash_{M, P, \mathcal{F}}$  und seine \*-Version einführen. Man rechnet nach, dass der einzige Punkt, an dem nicht alles ganz analog wie gehabt durchgeführt werden kann, der Name  $\tau$  im Beweis von AC in  $M_{\mathcal{F}}[G]$  ist. Dieser Name ist nicht immer erblich symmetrisch! Es ist zu überprüfen, dass man den Bereich der erblich symmetrischen Namen mit keinem anderen Axiom verlassen muss.  $\square$

Sei nun  $P = \text{Fn}(2 \times \omega \times \omega \times \omega, 2, \omega)$ . Wir nehmen die vorläufige Gruppe  $\mathcal{G}$ , so dass alle Elemente  $f \in \mathcal{G}$  die folgenden Eigenschaften haben:

- (a)  $f$  ist eine Permutation von  $\{0, 1\} \times \omega \times \omega$ ,
- (b)  $f$  lässt die zweite Koordinate immer fest,
- (c)  $\forall n (\forall m \forall \varepsilon \exists m' f(\varepsilon, n, m) = (\varepsilon, n, m')) \vee \forall m \varepsilon \exists m' f(\varepsilon, n, m) = (1 - \varepsilon, n, m')$ .

Nun machen wir hieraus eine Gruppe  $F$  von Automorphismen von  $P$ , indem wir

$$\check{f}(p)(f(\varepsilon, n, m), i) = p(\varepsilon, n, m, i)$$

setzen und dann  $F = \{\check{f} \mid f \in \mathcal{G}\}$  wählen.

Für jede endliche Teilmenge  $E$  von  $2 \times \omega \times \omega$  definieren wir die Untergruppe  $\mathcal{G}_E = \{f \in \mathcal{G} \mid (\forall (\varepsilon, n, m) \in E) f(\varepsilon, n, m) = (\varepsilon, n, m)\}$ , und nehmen  $F_E = \{\check{f} \mid f \in \mathcal{G}_E\}$ .  $\mathcal{F} = \{F_E \mid E \subseteq 2 \times \omega \times \omega, E \text{ endlich}\}$  ist dann ein Filter von Automorphismengruppen. Außerdem ist  $\check{f}F_E\check{f}^{-1} = F_{f''E}$ .

**Satz 9.8.** Sei  $G$   $P$ -generisch über  $M$ . Dann gilt in  $M_{\mathcal{F}}[G]$  das Auswahlaxiom nicht.

Beweis: Für  $n, m \in \omega$  wählen wir folgende Namen:

$$\begin{aligned} a_{\check{n},m} &= \{\langle \check{i}, p \rangle \in \omega \times P \mid p(0, n, m, i) = 1\}, \\ b_{\check{n},m} &= \{\langle \check{i}, p \rangle \in \omega \times P \mid p(1, n, m, i) = 1\}, \\ a_{\check{n}} &= \{\langle a_{\check{n},m}, 1 \rangle \mid m \in \omega\}, \\ b_{\check{n}} &= \{\langle b_{\check{n},m}, 1 \rangle \mid m \in \omega\}, \\ P_{\check{n}} &= \text{up}(a_{\check{n}}, b_{\check{n}}). \end{aligned}$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \check{f}(a_{\check{n},m}) &= a_{\check{n},m'} \text{ oder } = b_{\check{n},m'}, \\ \check{f}(a_{\check{n}}) &= a_{\check{n}} \text{ oder } = b_{\check{n}}, \\ \check{f}(P_{\check{n}}) &= P_{\check{n}}. \end{aligned}$$

Sei für alle diese Namen  $x_G = x$ . Nun rechnet man nach, dass  $P_{\check{n}}$  ein erblich symmetrischer Name ist mit  $E = \emptyset$  als Zeugen für Definition 4.5 (1).  $a_{\check{n},m}$  ist symmetrisch für  $F_E$  mit  $E = \{(0, n, m)\}$ ,  $a_{\check{n}}$  ist (nur) symmetrisch für jedes  $F_E$  mit  $\exists m(0, n, m) \in E$ , denn 0 darf nicht mit 1 vertauscht werden in der ersten Komponente.

Daher ist  $P_{\check{n}G} \in M_{\mathcal{F}}[G]$ . Auch ist  $\{\langle \check{n}, P_{\check{n}}, 1_P \rangle \mid n \in \omega\}$  ein erblich symmetrischer Name für eine Aufzählung von ganz  $\{P_n \mid n \in \omega\}$ .

Nun beweisen wir folgende Behauptung: In  $M_{\mathcal{F}}[G]$  gibt es keine Auswahl-funktion  $\tau_G: \omega \rightarrow V$  so dass für alle  $n$ ,  $\tau_G(n) \in P_n$ .

Sonst: Sei  $\tau_G$  eine solche Funktion und sei  $\tau$  ein erblich symmetrischer Name für sie und gelte

$$p_0 \Vdash_{\mathcal{F}} \forall n \tau(n) \in P_n.$$

$\tau$  ist also  $F_E$ -invariant für ein  $E$ . Sei  $n$  so, dass  $\forall m, \varepsilon(\varepsilon, n, m) \notin E$ .

Dann gibt es ein  $p \leq p_0$ , so dass

$$p \Vdash_{\mathcal{F}} \tau(\check{n}) = a_{\check{n}}.$$

Wir werden ein  $\check{f} \in F$  finden, so dass

- (i)  $\check{f}(p)$  und  $p$  verträglich sind,
- (ii)  $\check{f} \in F_E$ ,
- (iii)  $\check{f}(a_{\check{n}}) = b_{\check{n}}$ .

Dann ist  $\check{f}(\tau) = \tau$  und

$$p \cup \check{f}(p) \Vdash_{\mathcal{F}} \tau(n) = b_{\check{n}} \wedge \tau(n) = a_{\check{n}}.$$

Widerspruch.

Sei

$$m_0 > \max\{m \mid \exists(\varepsilon, n, m, i) \in \text{dom}(p)\}.$$

Wir setzen  $f(\varepsilon, n', m) = (\varepsilon, n', m)$  für  $n' \neq n$ . und

$$f(0, n, m) = \begin{cases} (1, n, m + m_0) & \text{wenn } m < m_0 \\ (1, n, m - m_0) & \text{wenn } m_0 \leq m < 2m_0 \\ (1, n, m) & \text{wenn } m \geq 2m_0. \end{cases}$$

und  $f(1, n, m)$  entsprechend. Dann ist  $\check{f} \in F_E$  und  $\check{\check{f}}(a_n) = b_n$ . Außerdem sind  $\check{f}(p)$  und  $p$  verträglich, also (i), (ii) und (iii) erfüllt.  $\square$

Bemerkung: Es sind zwei Konventionen verbreitet zur Bezeichnung irgend-eines Namens für  $a \in M[G]$ . Die ältere ist  $\acute{a}$  die jüngere ist  $\mathcal{a}$ . Punkt und Untertilde sind keineswegs Funktionen, denn jedes Element hat Klassen-viele Namen.

ÜBUNG: Zeigen Sie, dass es in  $M_{\mathcal{F}}[G]$  keine lineare Ordnung auf der Menge  $\bigcup_n P_n$  gibt.

# Kapitel 10

## Vollständige Einbettungen, boolesche Werte, das Maximalitätsprinzip

### 10.1 Subhalbordnungen und Einbettungen

**Definition 10.1.** Seien  $(P, \leq_P, 1_P)$  und  $(Q, \leq_Q, 1_Q)$  Forcing-Halbordnungen. (Die Antisymmetrie und die 1 werden nicht wirklich gebraucht).  $i: P \rightarrow_c Q$  ist eine *vollständige Einbettung* gdw  $i$  folgende drei Eigenschaften hat:

- (1)  $\forall p, p' \in P (p' \leq p \rightarrow i(p') \leq i(p))$ ,
- (2)  $\forall p, p' \in P (p' \perp p \leftrightarrow i(p') \perp i(p))$ ,
- (3)  $\forall q \in Q \exists p \in P \forall p' \in P (p' \leq p \rightarrow i(p') \not\perp q)$ , solch ein  $p$  heißt eine Reduktion von  $q$ .

**Lemma 10.2.** Sei  $D \subseteq P$  dicht in  $P$ , und sei  $A \subseteq D$  eine maximale Antikette in  $D$ . Dann ist  $A$  auch eine maximale Antikette in  $P$ .

**Lemma 10.3.**  $i: P \rightarrow_c Q$  ist äquivalent zu (1) und (2) von oben und

- (3') Für jede maximale Antikette  $A$  von  $P$  ist  $i''A$  eine maximale Antikette in  $Q$ .

Beweis: (3) impliziert (3'): Sei  $A$  eine maximale Antikette in  $P$ . Annahme  $q \perp i(a)$  für jedes  $a \in A$ . Dann hat  $q$  keine Reduktion, denn: Angenommen  $p \in P$  wäre ein Reduktion.  $p \not\perp a$  für ein  $a \in A$ . Sei  $p' \leq p, a$ . Dann ist  $p' \leq p$  und  $i(p') \perp q$ . Also ist  $p$  keine Reduktion.

(3') impliziert (3): Sei  $q$  in  $Q$  gegeben. Wir nehmen an, dass  $q$  keine Reduktion hätte. Dann ist  $\{p' \mid i(p') \perp q\}$  dicht in  $P$ . Daher gibt es eine maximale Antikette in  $D$ , die auch maximal in  $P$  ist. Diese maximale Antikette wird durch  $i$  auf eine Antikette abgebildet, die auf  $q$  senkrecht steht. Also werden maximale Antiketten nicht erhalten.  $\square$

Falls  $i = \text{id}_P$ , so schreiben wir  $(P, \leq_P, 1_P) \subseteq_c (Q, \leq_Q, 1_Q)$  oder  $(P, \leq_P, 1_P) \triangleleft (Q, \leq_Q, 1_Q)$  und sagen  $P$  ist eine vollständige Unterhalbordnung von  $Q$ .

**Lemma 10.4.** (a)  $i: P \cong Q$  impliziert  $i: P \rightarrow_c Q$ .

(b)  $I \subseteq I'$  impliziert  $\text{Fn}(I, J, \kappa) \subseteq_c \text{Fn}(I', J, \kappa)$ .

Beweis: (b)  $q \upharpoonright I$  ist eine Reduktion von  $q$ .

Gegenbeispiele:  $\text{id}: \text{Fn}(\omega, \omega, \omega) \not\rightarrow_c \text{Fn}(\omega, \omega_1, \omega)$  und  $\text{Fn}(\omega, \omega, \omega) \not\subseteq_c \text{Fn}(\omega, \omega, \omega_1)$  (da letztere Halbordnung gar nichts tut und erstere eine reelle Zahl hinzufügt.).

Eine Menge  $D \subseteq P$  heißt prädict, wenn

$$\forall p \in P \exists q \in D p \not\leq q.$$

**Satz 10.5.** Sei  $i: P \rightarrow_c Q$  und sei  $H$   $Q$ -generisch über  $M$ . Dann ist  $i^{-1}H$   $P$ -generisch über  $M$  und  $M[i^{-1}H] \subseteq M[H]$ .

Beweis: Sei  $D \in M$ ,  $D$  dichte Teilmenge von  $P$ . Dann ist  $i''D$  prädict in  $Q$ , denn sonst hätte ein  $q$ , unter dem  $i''D$  nicht dicht ist, keine Reduktion. Dann folgt aus  $H \cap i''D \neq \emptyset$ , dass  $i^{-1}H \cap D \neq \emptyset$ .  $i^{-1}H$  schneidet also alle dichten Mengen in  $M$ .

$i^{-1}H$  ist ein Filter: Sei  $p \in i^{-1}H$ . Dann ist  $i(p) \in H$ . Sei  $p' \geq p$ . Dann ist nach Eigenschaft (1)  $i(p') \geq i(p)$ . Somit ist  $i(p') \in H$ . Dann ist  $p' \in i^{-1}H$ .

Seien  $p, p' \in i^{-1}H$ . Dann sind  $i(p), i(p') \in H$ . Sei  $q \leq i(p), i(p')$ ,  $q \in H$ . Dann ist nach Eigenschaft (1)  $i^{-1}(q) \in i^{-1}H$ . Aber ist  $i^{-1}(q) \leq p, p'$ ? Sicherlich ist  $p \not\leq p'$  wegen Eigenschaft (2). Da  $i^{-1}H$  alle dichten Mengen schneidet, schneidet es insbesondere

$$D = \{r \mid r \leq p, p' \vee r \perp p' \vee r \perp p\}.$$

Da  $H$  ein Filter ist, kann  $i^{-1}H$  keine zwei unverträglichen Elemente enthalten, und daher schneidet es  $D$  in einem  $r \leq p, p'$ .

$i \in M$  impliziert, dass  $i^{-1}H \in M[H]$ . Daher ist nach der Minimalität von  $M[H]$ ,  $M[i^{-1}H] \subseteq M[H]$ .  $\square$

**Definition 10.6.** Seien  $(P, \leq_P, 1_P)$  und  $(Q, \leq_Q, 1_Q)$  Forcing-Halbordnungen.  $i: P \rightarrow_d Q$  ist eine *dichte Einbettung* gdw  $i$  folgende drei Eigenschaften hat:

- (1)  $\forall p, p' \in P (p' \leq p \rightarrow i(p') \leq i(p))$ ,
- (2)  $\forall p, p' \in P (p' \perp p \rightarrow i(p') \perp i(p))$ ,
- (3)  $i''P$  liegt dicht in  $Q$ .

**Lemma 10.7.** Jede dichte Einbettung ist eine vollständige Einbettung.

Beweis: Sei  $i: P \rightarrow_d Q$  ist eine dichte Einbettung. Zu jedem  $q \in Q$  gibt es ein  $p \in P$ , so dass  $i(p) \leq q$ . Solch ein  $p$  ist eine Reduktion von  $q$ .  $\square$

**Lemma 10.8.** Seien  $G_1$  und  $G_2$  generische Filter über  $M$ , und sei  $G_1 \subseteq G_2$ . Dann ist  $G_1 = G_2$ .

Beweis: Annahme, es gäbe ein  $p \in G_2 \setminus G_1$ . Die Menge

$$\{q \in P \mid q \perp p \vee q \leq p\}$$

ist dicht in  $P$  und wird von  $G_1$  geschnitten. Da  $p \notin G_1$ , gibt es ein  $r \in G_1$ ,  $r \perp p$ . Da  $G_1 \subseteq G_2$ , ist  $r \in G_2$ . Dann ist  $r \perp p$  und beide sind in  $G_2$ . Widerspruch.  $\square$

**Satz 10.9.** Sei  $i: P \rightarrow_d Q$  eine dichte Einbettung. Und sei  $A \subseteq P$ . Wir definieren  $\tilde{i}A = \{q \in Q \mid (\exists p \in A)(i(p) \leq q)\}$ . Dann gilt folgendes.

- (a) Wenn  $H \subseteq Q$   $Q$ -generisch über  $M$  ist, dann ist  $i^{-1}H$   $P$ -generisch über  $M$ .
- (b) Wenn  $G \subseteq P$   $P$ -generisch über  $M$  ist, dann ist  $\tilde{i}G$   $Q$ -generisch über  $M$ .
- (c)  $G = i^{-1}H$  impliziert, dass  $H = \tilde{i}G$  und  $M[G] = M[H]$ .

Beweis: a)  $i^{-1}H$  ist  $P$ -generisch, da  $i$  vollständig ist.

b) Sei  $D$  dicht in  $Q$ ,  $D \in M$ . Dann ist

$$D^* = \{p \in P \mid \exists q \in D(i(p) \leq q)\}$$

dicht in  $P$ . Dies zeigt man wie folgt: Sei  $p \in P$  gegeben. Es gibt nach der Dichtheit von  $D$  ein  $q \in D$ , so dass  $i(p) \geq q$ . Sei  $i(p') \leq q$ , so ein  $p'$  gibt es, da die Einbettung dicht ist. Dann ist  $i(p') \leq q \leq i(p)$  und daher ist  $p \not\leq p'$ . Jedes  $p'' \leq p, p'$  ist dann in  $D$ .

c)  $G \subseteq i^{-1}\tilde{i}G$ . Da  $i^{-1}\tilde{i}G$  generisch ist, folgt nach dem Lemma die Gleichheit.

**Definition 10.10.** Sei  $i: P \rightarrow Q$ . Wie definieren rekursiv über die  $P$ -Namen  $i_*: \mathbf{V}^P \rightarrow \mathbf{V}^Q$  durch

$$i_*(\tau) = \{\langle i_*(\sigma), i(p) \rangle \mid \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}.$$

**Lemma 10.11.** Sei  $i: P \rightarrow_c Q$ ,  $i \in M$ .

- (a) Wenn  $H$   $Q$ -generisch über  $M$  ist, dann ist  $\text{val}(\tau, i^{-1}H) = \text{val}(i_*(\tau), H)$ .
- (b) Wenn  $\varphi$  absolut für abzählbare transitive Modelle von  $\text{ZFC}^*$  ist und  $\bar{\tau}$   $P$ -Namen sind und  $M \models T'(\text{ZFC}^*)$  ( $T'$  wie in Satz 2.29), dann

$$(p \Vdash_{M,P} \varphi(\bar{\tau})) \leftrightarrow (i(p) \Vdash_{M,Q} \varphi(i_*(\bar{\tau}))).$$

- (c) Wenn  $\varphi$  beliebig ist und  $i$  eine dichte Einbettung ist, dann

$$(p \Vdash_P \varphi(\bar{\tau})) \leftrightarrow (i(p) \Vdash_Q \varphi(i_*(\bar{\tau}))).$$

Beweis: a)  $\text{val}(\tau, i^{-1}H) = \{\text{val}(\sigma, i^{-1}H) \mid \exists p \in i^{-1}H, \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}$

$$\stackrel{IV}{=} \{\text{val}(i_*(\sigma), H) \mid \exists q \in H \langle i_*(\sigma), q \rangle \in i_*(\tau)\} = \text{val}(i_*(\tau), H).$$

b) Gelte  $p \Vdash_{M,P} \varphi(\bar{\tau})$ . Seien  $H \subseteq Q$  und  $i(p) \in H$ , und sei  $H$   $Q$ -generisch über  $M$ . Dann ist  $p \in i^{-1}H$ . Also gilt  $M[i^{-1}H] \models \varphi(\text{val}(\bar{\tau}, i^{-1}H))$ . Nach

a) ist dies äquivalent zu  $M[i^{-1''}H] \models \varphi(\text{val}(i_*(\bar{\tau}), H))$ . Da  $M[H] \supseteq M[i^{-1''}H]$  und da  $\varphi$  eine zwischen  $M[H]$  und  $M[i^{-1''}H]$  absolute Eigenschaft ist, haben wir  $M[H] \models \varphi(\text{val}(i_*(\bar{\tau}), H))$ . Weil dies für jedes  $H$  mit  $i(p) \in H$  gilt, haben wir  $i(p) \Vdash_{M,Q} \varphi(i_*(\bar{\tau}))$ .

c)  $\tau_{i^{-1''}H} \mapsto (i_*(\bar{\tau}))_H$  ist die Identität von  $M[i^{-1''}H]$  auf  $M[H]$ .

□

## 10.2 Boolesche Werte

**Lemma 10.12.** *Sei  $P$  eine Halbordnung. Dann gibt es eine eindeutige vollständige boolesche Algebra  $\mathcal{B}$ , so dass es ein  $i: P \rightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$  gibt mit den folgenden Eigenschaften*

- (1)  $\forall p, p' \in P (p \leq p' \rightarrow i(p) \leq i(p'))$ ,
- (2)  $\forall p, p' \in P (p \perp p' \leftrightarrow i(p) \wedge i(p') = 0)$ ,
- (3)  $i''P$  ist dicht in  $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ .

Beweisskizze: Wir definieren eine Topologie auf  $P$ : Eine Basis für die offenen Mengen sei  $\{\{q \mid q \leq p\} \mid p \in P\}$ , die Menge der sogenannten Kegel (cones). Sei  $\text{int}(b)$  das Innere von  $b$ , d.h., die Vereinigung aller offenen Teilmengen von  $b$ . Sei  $\text{cl}(b)$  der Abschluss von  $b$  in dieser Topologie. Dann definieren wir für  $b \subseteq P$ .

$$b \text{ ist regulär und offen} \leftrightarrow b = \text{int}(\text{cl}(b)).$$

Für die cone-Topologie auf  $P$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{int}(a) &= \{p \mid \forall q \geq pq \in a\}, \\ \text{cl}(a) &= \{p \mid \exists q \geq pq \in a\}, \\ \text{int cl}(a) &= \{p \mid \forall q \geq p \exists r \geq qr \in a\}. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass  $\int \text{cl}(\text{int cl}(a)) = \text{int cl}(a)$  für jede Teilmenge eines topologischen Raums. Nun definieren wir  $\mathcal{B} = \text{RO}(P)$  die Menge der regulär offenen Teilmengen von  $P$ . Auf  $\mathcal{B}$  werden  $\wedge, \vee$  und das Komplement  $^c$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} b \wedge c &= b \cap c, \\ b \vee c &= \text{int}(\text{cl}(b \cup c)), \\ b^c &= \text{int}(P \setminus b). \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$  ist eine vollständige boolesche Algebra, denn für  $S \subseteq \mathcal{B}$  sind  $\bigvee S = \text{int}(\text{cl}(\bigcup S))$  und  $\bigwedge S = \text{int}(\bigcap S)$  das Supremum und das Infimum. Ausführlich kann man zur Algebra der regulär offenen Mengen in [13] in Kapitel 4 und Kapitel 7 nachlesen.

Nun definieren wir die Einbettung  $i(p) = \text{int cl}(\{q \mid q \leq p\})$ . Man rechnet nach, dass  $i$  Eigenschaften (1) und (2) einer vollständigen Einbettung hat. Nun rechnet man noch nach, dass  $i$  eine dichte Einbettung ist. Sei  $b = \text{int}(\text{cl}(b))$

und sei  $q \in b$ . Dann ist, da  $b$  offen ist, auch  $\{r \mid r \leq q\} \subseteq b$  und, da  $b$  regulär ist  $i(q) = \text{int cl}(\{r \mid r \leq q\}) \subseteq b$ .  $\square$

Bemerkung: Wann ist  $i$  vom vorigen Beweis injektiv? Wir brauchen, dass  $p \neq q \rightarrow i(p) \neq i(q)$ . Wir nehmen an, dass es unter  $p$  ein  $r$  gibt, das mit  $q$  unverträglich ist. Dann ist  $r \notin i(q)$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $P$  separativ ist.

**Definition 10.13.**  $P$  heißt *separativ* gdw  $\forall p, q \in P (p \neq q \rightarrow \neg \forall r (r \perp p \leftrightarrow r \perp q))$

Wir definieren  $p \equiv q$  gdw  $\forall r (r \perp p \leftrightarrow r \perp q)$ .  $\equiv$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $P$ . Wir definieren  $p / \equiv \leq' q / \equiv$  gdw  $\forall r \leq p \exists s \leq qr \not\leq s$ . Dann ist  $(P / \equiv, \leq')$  eine separative Halbordnung, der sogenannte separative Quotient von  $P$ .  $(P / \equiv, \leq')$  wird injektiv in  $\text{RO}(P) = \text{RO}(P / \equiv)$  eingebettet.

**Definition 10.14.** Sei  $\mathcal{B}$  eine vollständige boolesche Algebra von  $M$ . Wir erweitern  $M$  durch Forcing mit  $(P, \leq) = (\mathcal{B} \setminus \{0\}, \subseteq)$ . Dann heißt

$$\llbracket \varphi(\bar{\tau}) \rrbracket = \bigvee \{p \in \mathcal{B} \mid p \Vdash \varphi(\bar{\tau})\}$$

der Wahrheitswert von  $\varphi(\bar{\tau})$ .

Natürlich ist die Vollständigkeit keine absolute Eigenschaft. Jede abzählbare vollständige boolesche Algebra ist endlich (Kunen, Kapitel 7, Übungen F1 und F6). Doch  $\mathcal{B} \subseteq M$  ist nur von  $V$  aus gesehen abzählbar. Und von  $V$  aus ist  $\mathcal{B}$  unvollständig, es sei denn es ist endlich.

**Lemma 10.15.** Sei wieder  $P = \mathcal{B} \setminus \{0\}$ .

- (1)  $\forall p \in \mathcal{B} \setminus \{0\} (p \Vdash \varphi(\bar{\tau}) \rightarrow p \leq \llbracket \varphi(\bar{\tau}) \rrbracket)$ .
- (2)  $\llbracket \varphi(\bar{\tau}) \vee \psi(\bar{\tau}) \rrbracket = \llbracket \varphi(\bar{\tau}) \rrbracket \vee \llbracket \psi(\bar{\tau}) \rrbracket$ .
- (3)  $\llbracket \varphi(\bar{\tau}) \wedge \psi(\bar{\tau}) \rrbracket = \llbracket \varphi(\bar{\tau}) \rrbracket \wedge \llbracket \psi(\bar{\tau}) \rrbracket$ .
- (4)  $\llbracket \neg \varphi(\bar{\tau}) \rrbracket = \llbracket \varphi(\bar{\tau}) \rrbracket^c$ .
- (5)  $\llbracket \exists x \varphi(x, \bar{\tau}) \rrbracket = \bigvee \{ \llbracket \varphi(\sigma, \bar{\tau}) \rrbracket \mid \sigma \in M^P \}$ .

Beweis: Seite 224 in Kunens Buch [21].

### 10.3 Das Maximalitätsprinzip

Zuerst beweisen wir ein Lemma über das Zusammenkleben längs einer Antikette:

**Lemma 10.16.** Sei  $A \subseteq P$ ,  $A \in M$ ,  $A$  Antikette in  $P$ . Sei für  $q \in A$   $\sigma_q$  ein  $P$ -Name. Dann gibt es einen  $P$ -Namen  $\pi$ , so dass für alle  $q \in A$ ,  $q \Vdash \pi = \sigma_q$ .

Beweis: Wir setzen

$$\pi = \bigcup_{q \in A} \{ \langle \tau, r \rangle \mid r \leq q \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_q \wedge \tau \in \text{dom}(\sigma_q) \}.$$

Sei  $q \in A$  und sei  $q \in G$ . Dann sollen wir  $\pi_G = (\sigma_q)_G$  zeigen. Wir zeigen  $\pi_G \subseteq (\sigma_q)_G$ : Sei  $x \in \pi_G$ . Dann gibt es ein  $r \in G$ , so dass  $x = \tau_G$  und  $\langle \tau, r \rangle \in \pi$ . Also ist  $r \leq q'$  und  $r \Vdash \tau \in \sigma_{q'}$  für ein  $q' \in A$  nach Definition von  $\pi$ . Da  $A$  eine Antikette ist und  $q$  und  $r$  in  $G$  sind, folgt aus  $r \leq q'$  und  $r \not\leq q$  dass  $q' = q$ . Somit haben wir  $r \Vdash \tau \in \sigma_q$ . Also ist  $x \in (\sigma_q)_G$ .

Wir zeigen  $(\sigma_q)_G \subseteq \pi_G$ . Sei  $x \in (\sigma_q)_G$ . Dann ist  $x = \tau_G$  für ein  $\tau \in \text{dom}(\sigma_q)$  und ein  $p$  mit  $\langle \tau, p \rangle \in \sigma_q$ ,  $p \in G$ .  $p \Vdash \tau \in \sigma_q$ . Dann gibt es ein  $r \leq p$ ,  $q, r \in G$ . Dieses  $r$  erfüllt  $\langle \tau, r \rangle \in \pi$ . Also  $x \in \pi_G$ .  $\square$

Beachten Sie, dass im folgenden Satz auch in der Konklusion  $p$  steht und nicht wie in Korollar 7.28 (d) eine stärkere Bedingung.

**Satz 10.17.** *Das Maximalitätsprinzip. Sei  $p \Vdash \exists x \varphi(x, \bar{\tau})$ . Dann gibt es ein  $\pi \in M^P$ , so dass  $p \Vdash \varphi(\pi, \bar{\tau})$ .*

Beweis: Wir nehmen an, dass  $M$  AC erfüllt. Dann gibt es eine ( $\subseteq$ -)maximale Antikette  $A \subseteq P$ ,  $A \in M$ , so dass für alle  $q \in A$ :

$$q \leq p \wedge \exists \sigma_q \in M^P q \Vdash \varphi(\sigma_q, \bar{\tau}).$$

Nun bilden wir  $\pi = \bigcup_{q \in A} \{ \langle \tau, r \rangle \mid r \leq q \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_q \wedge \tau \in \text{dom}(\sigma_q) \}$  wie im vorigen Lemma und zeigen  $p \Vdash \varphi(\pi, \bar{\tau})$ .

Sonst gäbe es ein  $r \leq p$ , so dass  $r \Vdash \neg \varphi(\pi, \bar{\tau})$ . Da  $\{q \mid \exists \sigma \in M^P q \Vdash \varphi(\sigma, \bar{\tau})\}$  dicht unterhalb  $p$  ist, gibt es ein  $q_0 \leq r$  und ein  $\sigma \in M^P$   $q_0 \Vdash \varphi(\sigma)$ . Für jedes  $q \in A$  gilt:  $q \Vdash \varphi(\sigma_q, \bar{\tau}) \wedge \sigma_q = \pi$  und  $q_0 \Vdash \neg \varphi(\pi, \bar{\tau})$ . Also ist  $q_0 \perp q$  für jedes  $q \in A$ , und man hat einen Widerspruch zur Maximalität von  $A$ .  $\square$

# Kapitel 11

## Die relative Konsistenz von $\diamond$ , der Lévy-Kollaps

### 11.1 Karo

Zu stationär konsultiere man Kapitel 4.

**Definition 11.1.**  $\diamond$  (Karo, (the) diamond, Jensen's diamond, the diamond principle) sei folgende Aussage: Es gibt eine Folge  $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1, \text{lim}(\alpha) \rangle$ , so dass für jedes  $\alpha$ ,  $S_\alpha \subseteq \alpha$  und für jede Teilmenge  $X$  von  $\omega_1$  die Menge

$$\{\alpha \in \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

stationär in  $\omega_1$  ist.

Jedes solche  $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1, \text{lim}(\alpha) \rangle$  heißt  $\diamond$ -Folge.

Bemerkung: Statt „stationär“ kann man auch nur nicht leer fordern. Sei  $\bar{S}$  ein Karo-Folge in dem neuen, schwachen Sinn. Dieselbe Karo-Folge hat dann auch die stärkere Vorhersageeigenschaft: Annahme:  $X \subseteq \omega_1$  und  $S_\alpha = X \cap \alpha$  nur auf einer nicht stationären Menge  $N$ . Dann nehmen wir eine monotone injektive regressive Funktion  $f$  von  $N \setminus \{0\}$  nach  $\omega_1$ , z.B.  $f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$  für einen club  $C$  mit  $C \cap N = \emptyset$ . Wir ändern  $X$  auf  $(f(\alpha), \alpha)$  geringfügig ab zu  $X'$ , so dass  $S_\alpha \neq X' \cap \alpha$  und so dass für kein  $\beta < \alpha$ ,  $S_\beta = X' \cap \beta$ . Dann wird  $X'$  nirgends von  $\bar{S}$  vorhergesagt, und daher ist  $\bar{S}$  auch keine Karo-Folge im schwachen Sinn.

**Definition 11.2.**  $P$  heißt  $(< \omega_1)$ -abgeschlossen (oder, leider auch,  $\omega$ -abgeschlossen oder  $\omega_1$ -abgeschlossen) gdw für alle  $\gamma < \omega_1$  für alle  $\langle p_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ , so dass  $p_\alpha \geq p_\beta$  für  $\alpha \leq \beta < \gamma$ , es ein  $q \in P$  gibt, so dass für alle  $\alpha < \gamma$ ,  $q \leq p_\alpha$ . Solch ein  $q$  heißt eine *untere Schranke* von  $\langle p_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ .

**Satz 11.3.** Sei  $P = \text{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)^M$ . Dann gilt

$$\emptyset \Vdash \diamond$$

und  $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ .

Beweis:  $P$  ist ( $< \omega_1$ )-abgeschlossen und fügt daher keine neue  $\omega$ -Folge von alten Elementen hinzu. Also ist  $({}^\omega M)^{M[G]} = ({}^\omega M)^M$  und es gibt also keine Funktion in  $M[G]$ , die  $(\omega_1)^M$  kollabieren würde.

Wir ersetzen  $\omega_1$  durch  $I = \{\langle \alpha, \xi \rangle \mid \xi < \alpha < \omega_1\}$  und erhalten, dass  $|I| = \omega_1$  in  $M$ . Daher ist  $P \cong Q = \text{Fn}(I, 2, \omega)$  und es gibt einen Isomorphismus in  $M$ . Wir benutzen nun  $Q$  für unsere Argumentation. Sei  $A: I \rightarrow 2$ . Dann erhalten wir hieraus  $A_\alpha: \alpha \rightarrow 2$ , indem wir  $A_\alpha(\xi) = A(\alpha, \xi)$  setzen. Wenn  $G$   $Q$ -generisch über  $M$  ist, dann ist  $\bigcup G: I \rightarrow 2$ . Wir zeigen, dass  $\langle (\bigcup G)_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$  eine  $\diamond$ -Folge ist.

Sei  $B \in M[G]$ ,  $B: \omega_1 \rightarrow 2$ . Wir zeigen, dass  $\{\alpha \mid B \upharpoonright \alpha = (\bigcup G)_\alpha\}$  stationär in  $\omega_1$  in  $M[G]$  ist.

Wir schreiben von nun an oft  $x$  statt  $\check{x}$ .

Wir nehmen an, dass dies nicht so wäre. Dann gibt es einen Namen  $\tau \in M^Q$  (für  $B$ ) und einen Namen  $\sigma \in M^Q$  für eine club Menge in  $\omega_1$  und ein  $p \in G$ , so dass

$$\begin{aligned} p \Vdash (\tau \subseteq \omega_1 \wedge \sigma \subseteq \omega_1 \wedge \sigma \text{ is club} \\ \wedge (\forall \alpha \in \sigma) \tau \upharpoonright \alpha \neq (\bigcup \Gamma)_\alpha) \end{aligned} \quad (*)$$

Nun vergessen wir  $G$  und  $B$  und arbeiten nun immer in  $M$ . Wir leiten aus (\*) einen Widerspruch her.

Für  $q \in Q$  sei

$$\text{supt}(q) = \min\{\beta \mid \text{dom}(q) \subseteq \{\langle \alpha, \xi \rangle \mid \xi < \alpha < \beta\}\}.$$

Nun definieren wir induktiv über  $n$  Bedingungen  $p_n$  und Ordinalzahlen  $\beta_n$  und  $\delta_n$  und abzählbare Mengen  $b_n \in M$ . Alle definierten Objekte sind in  $M$  und auch die ganze Folge wird durch den Rekursionssatz in  $M$  hergestellt. Die Objekte sollen folgende sieben Eigenschaften haben

- (1)  $p_0 = p$ .
- (2)  $\beta_n = \text{supt}(p_n)$ .
- (3)  $\delta_n > \beta_n$ .
- (4)  $p_{n+1} \leq p_n$ .
- (5)  $p_{n+1} \Vdash \delta_n \in \sigma$ .
- (6)  $\text{supt}(p_{n+1}) > \delta_n$ .
- (7)  $b_n: \beta_n \rightarrow 2$  und  $p_{n+1} \Vdash \tau \upharpoonright \beta_n = \check{b}_n$ .

Sei  $p_n$  gegeben. Wir zeigen, wie man  $\beta_n$ ,  $\delta_n$ ,  $b_n$  und  $p_{n+1}$  definiert.

Da  $p_n \leq p$  ist  $p_n \Vdash \sigma \text{ is club}$ . Also (nach Lemma 7.31)  $p_n \Vdash \exists x \in \omega_1 (x > \beta_n \wedge x \in \sigma)$ . Nun gibt es nach Korollar 7.28 (d) ein  $q \leq p_n$  und ein  $\delta_n \in \omega_1$  so dass  $q \Vdash (\check{\delta}_n > \beta_n \wedge \check{\delta}_n \in \sigma)$ . Also  $\delta_n > \beta_n$  und  $q \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$ .

Sei  $r$  eine Verstärkung von  $q$  mit  $\text{supt}(r) > \delta_n$ . Für (7) sei nun  $F = ({}^{\beta_n} 2)$ . Dann  $r \Vdash \tau \upharpoonright \beta_n \in \check{F}$ , da  $P$   $\omega$ -abgeschlossen ist und daher keine neue Funktion von  $\beta_n$  nach 2 hinzufügt. Also gibt es ein  $b_n \in F$  und ein  $p_{n+1} \leq r$ , so dass  $p_{n+1} \Vdash \tau \upharpoonright \beta_n = \check{b}_n$ .

Sei

$$\gamma = \sup\{\beta_n \mid n \in \omega\} = \sup\{\delta_n \mid n \in \omega\}.$$

Sei  $p_\omega = \bigcup p_n$ , dann ist  $\text{supt}(p_\omega) = \gamma$ . Für jedes  $n$  ist  $p_\omega \leq p_{n+1}$ , also  $p_\omega \Vdash \tau \upharpoonright \beta_n = b_n$ . Daher ist auch  $b_\omega = \bigcup_n b_n$  eine Funktion von  $\gamma$  nach 2 und  $p_\omega \Vdash \tau \upharpoonright \gamma = b_\omega$ .

Nun verstärken wir  $p_\omega$  zu  $s$ , indem wir  $s$  an den neuen Punkten durch  $s(\gamma, \xi) = b_\omega(\xi)$  für  $\xi < \gamma$  festlegen. Dann haben wir  $s \Vdash (\bigcup \Gamma)_\gamma = b_\omega$ . Aus  $s \Vdash (\sigma \text{ ist abgeschlossen } \wedge \forall n \delta_n \in \sigma)$  erhalten wir nach Lemma 7.31  $s \Vdash \gamma \in \sigma$ . Also haben wir

$$s \Vdash (\exists \alpha \in \sigma)(\tau \upharpoonright \alpha = (\bigcup \Gamma)_\alpha)$$

und  $s \leq p$ , also einen Widerspruch zu (\*).

## 11.2 Der Lévy-Kollaps

**Definition 11.4.** Für jede Kardinalzahl  $\kappa$  definieren wir den *Lévy-Kollaps* für  $\kappa$ ,  $\text{Lv}(\kappa)$ , als

$$\{p \mid |p| < \omega \wedge p \text{ ist eine Funktion } \wedge \text{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega \\ \wedge \forall \langle \alpha, n \rangle \in \text{dom}(p) p(\alpha, n) \in \alpha\}$$

$\text{Lv}'(\kappa)$ , als

$$\{p \mid |p| < \omega_1 \wedge p \text{ ist eine Funktion } \wedge \text{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega_1 \\ \wedge \forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \text{dom}(p) p(\alpha, \beta) \in \alpha\}$$

Die Forcing-Halbordnung ist die umgekehrte Inklusion: die Oberfunktion ist die stärkere Bedingung:  $q \leq p$  gdw  $q \supseteq p$ .

**Definition 11.5.** Sei  $\kappa$  überabzählbar und regulär.  $P$  hat die  $\kappa$ -c.c. gdw alle Antiketten in  $P$  die Mächtigkeit strikt kleiner als  $\kappa$  haben.

ÜBUNG: Für jede Halbordnung  $P$  gilt: Das kleinste  $\kappa$ , so dass  $P$  die  $\kappa$ -c.c. hat, ist immer regulär und kann nicht  $\omega$  sein.

**Lemma 11.6.** Wenn  $\kappa$  regulär und überabzählbar ist, dann hat  $\text{Lv}(\kappa)$  die  $\kappa$ -c.c. Wenn  $\kappa$  stark unerreichbar (siehe Def. 3.42) ist, dann hat  $\text{Lv}'(\kappa)$  die  $\kappa$ -c.c.

Beweis: Wieder zeigen wir eine Art Knaster-Bedingung. Seien  $\kappa$  Bedingungen  $p_\mu$ ,  $\mu < \kappa$ , gegeben. Nach dem  $\Delta$ -System-Satz gibt es eine Menge  $B$  (für  $\text{Lv}'$  nehmen wir hier die starke Unerreichbarkeit und die allgemeinere Fassung des Deltasystemlemmas) so dass  $|B| = \kappa$  und so dass  $\{\text{dom}(p_\mu) \mid \mu \in B\}$  ein  $\Delta$ -System mit einer Wurzel  $r$  bildet. Da  $\kappa$  regulär ist und da es strikt weniger als  $\kappa$  Möglichkeiten für  $p_\mu \upharpoonright r$  gibt, gibt es ein  $C \subseteq B$ ,  $|C| = \kappa$ , so dass alle  $p_\mu \upharpoonright r$ ,  $\mu \in C$ , übereinstimmen. Dann sind je endlich viele der  $p_\mu$ ,  $\mu \in C$ , miteinander verträglich.  $\square$

Man kann in 8.8 und 8.13  $\aleph_1$  durch jedes reguläre überabzählbare  $\kappa$  ersetzen und erhält:

**Lemma 11.7.** *Wenn  $P$  die  $\kappa$ -c.c. hat, dann bleiben alle Kardinalzahlen  $\geq \kappa$  erhalten bei Forcing mit  $P$ .*

**Satz 11.8.** *Sei  $\kappa$  stark unerreichbar in  $M$ . Sei  $G$   $\text{Lv}'(\kappa)$ -generisch über  $M$ . Dann ist  $\kappa = (\omega_2)^{M[G]}$ , und alle  $\lambda \geq \kappa$ , die Kardinalzahlen in  $M$  sind, bleiben Kardinalzahlen in  $M[G]$ . Analoges gilt für reguläres überabzählbares  $\kappa$  und die Ordnung  $\text{Lv}(\kappa)$  und  $\kappa = (\omega_1)^{M[G]}$ .*

Beweis: Wir wenden das vorige Lemma in  $M$  an und erhalten  $(\text{Lv}(\kappa))$  hat die  $\kappa$ -c.c.) <sup>$M$</sup> . Also bleiben  $\kappa$  und alle größeren Kardinalzahlen von  $M$  auch in  $M[G]$  Kardinalzahlen. Für  $0 < \alpha < \kappa$  zeigen Standard-Dichtheitsargumente, dass für  $\text{Lv}(\kappa)$

$$\left(\bigcup G\right)_\alpha = \{\langle \beta, \xi \rangle \mid \langle \alpha, \beta, \xi \rangle \in \bigcup G\}$$

eine Funktion von  $\omega$  auf  $\alpha$  ist. Also ist  $\alpha$  abzählbar in  $M[G]$ . Für  $\text{Lv}'(\kappa)$  betrachtet man nur  $\alpha \geq \omega_1$  und surjektive Funktionen von  $\omega_1$  auf  $\alpha$ .  $\square$

$\text{Lv}'(\kappa)$  ist nützlich für die Untersuchung von Bäumen auf  $\omega_1$  und auf  $\omega_2$ .

Wir schließen mit dem Bericht über eine Konsistenz relativ zu  $\text{ZFC} + \exists \kappa$  unerr. Die starke Unerreichbarkeit wird hier nicht für die Ketteneigenschaft, sondern für ein Reflexionsargument im Beweis benutzt.

**Satz 11.9.** *Solovay 1970 [29] Sei  $\kappa$  eine stark unerreichbare Kardinalzahl in  $M$  und sei  $G$   $\text{Lv}(\kappa)$ -generisch über  $M$ . Dann gilt in  $M[G]$*

$$\forall X \subseteq \mathbb{R} (X \in \mathbf{HOD}(\mathcal{P}(\omega)) \rightarrow X \text{ ist Lebesgue-messbar}). \quad (\odot)$$

Später zeigte Shelah [26], dass jedes Modell von  $(\odot)$  ein inneres Modell mit einer unerreichbaren Kardinalzahl hat. Dies heißt insbesondere, dass es kein Forcing gibt, das von einem Grundmodell  $M \models \text{ZFC}^*$  ohne über  $\text{ZFC}^*$  hinausgehende Annahmen startet und  $(\odot)$  erzwingt. Hier ist  $\mathbf{HOD}$  (hereditarily ordinarily definable) die Klasse der erblich (d.h., die Menge hat die Eigenschaft, alle Elemente haben die Eigenschaft, alle Elemente von Elementen haben die Eigenschaft ...) mit ordinalen Parametern definierbaren Mengen.  $\mathbf{HOD}(X)$  heißt, dass man  $X$  noch hinzugibt, jedes  $x \in X$  ist auch ein Parameter.  $\mathbf{HOD}(\mathcal{P}(\omega)) \models \text{ZF} + \text{DC}$ .

Will man hingegen ein Modell von  $\text{ZFC}$ , hat man immer die Vitali-Menge, die nicht Lebesgue-messbar ist. Doch auch für  $\text{ZFC}$ -Modelle liefert das Solovays Arbeit ein interessantes Resultat: In  $\mathbf{HOD}$  in  $M[G]$  sind alle projektiven Teilmengen der reellen Zahlen Lebesgue-messbar, und  $\mathbf{HOD} \models \text{ZFC}$ .

# Kapitel 12

## Iteriertes Forcing

**Definition 12.1.** Sei  $P$  eine partielle Ordnung in  $M$ . Ein  $P$ -Name für eine partielle Ordnung ist ein Tripel  $\langle \pi, \pi', \pi'' \rangle \in M$  mit  $\pi'' \in \text{dom}(\pi)$  und

$$1 \Vdash (\pi'' \in \pi \wedge \pi' \text{ ist eine Quasiordnung auf } \pi \text{ mit größtem Element } 1).$$

Wir schreiben auch  $\langle \pi, \leq_\pi, 1_\pi \rangle$  für  $\langle \pi, \pi', \pi'' \rangle$ .

Nun definieren wir die Zweischritt-Iteration: Zuerst  $P$  danach, in der Erweiterung durch  $P$ , wird mit  $\pi_G$  noch einmal erweitert. Doch es erweist sich praktischer, dieses als einen Schritt mit einer zusammengesetzten Quasiordnung aufzufassen:

**Definition 12.2.** Sei  $P \in M$  eine Quasiordnung, und sei  $\pi$  ein  $P$ -Name für eine Quasiordnung,  $\pi \in M$ . Dann definieren wir in  $M$  eine Quasiordnung  $P * \pi$  mit Trägermenge:

$$\{\langle p, \tau \rangle \mid p \in P \wedge \tau \in \text{dom}(\pi) \wedge p \Vdash \tau \in \pi\}.$$

Auf dieser Trägermenge definieren wir die Quasiordnung  $\langle q, \tau \rangle \leq_{P*\pi} \langle p, \sigma \rangle$  gdw  $q \leq p \wedge q \Vdash \tau \leq_\pi \sigma$ . Wir setzen  $1_{P*\pi} = \langle 1_P, 1_\pi \rangle$ . Außerdem definieren wir  $i: P \rightarrow P * \pi$  durch  $i(p) = \langle p, 1 \rangle$ .

Nun wollen wir, dass  $P * \pi$  eine vollständige Erweiterung von  $P$  ist. Dies sagt das nächste Lemma.

**Lemma 12.3.** Seien  $P, \pi, i \in M$  wie in der vorigen Definition. Dann gilt

- (a)  $\forall p, p' \in P (p \leq p' \leftrightarrow \langle p, 1 \rangle \leq \langle p', 1 \rangle)$ .
- (b)  $i(1_P) = 1_{P*\pi}$ .
- (c)  $\forall \langle p, \tau \rangle, \langle p', \tau' \rangle (p \perp p' \rightarrow \langle p, \tau \rangle \perp \langle p', \tau' \rangle)$ .
- (d)  $\forall \langle p, \tau \rangle, p' \in P (p \perp p' \leftrightarrow \langle p, \tau \rangle \perp \langle p', 1_\pi \rangle)$ .
- (e)  $\forall p, p' \in P (p \perp p' \leftrightarrow \langle p, 1_\pi \rangle \perp \langle p', 1_\pi \rangle)$ .
- (f)  $i: P \rightarrow P * \pi$  ist eine vollständige Einbettung.

Beweis: (d) impliziert, dass  $p$  eine Reduktion von  $\langle p, \pi \rangle$  auf  $P$  ist.

**Definition 12.4.** Sei  $G$   $P$ -generisch über “ $M$ ”, und sei  $H \subseteq \pi_G$ . Dann setzen wir

$$G * H = \{\langle p, \tau \rangle \mid p \in G \wedge \tau_G \in H\}.$$

**Satz 12.5.** Sei  $P$  eine Quasiordnung in  $M$ , und sei  $\pi$  ein  $P$ -Name für eine Quasiordnung. Sei  $K$   $P * \pi$ -generisch über  $M$ . Sei  $G = (i^{-1})''K$ , und sei

$$H = \{\tau_G \mid \tau \in \text{dom}(\pi) \wedge \exists q \langle q, \tau \rangle \in K\}.$$

Dann ist  $G$   $P$ -generisch über  $M$ ,  $H$  ist  $\pi_G$ -generisch über  $M[G]$ ,  $K = G * H$  und  $M[K] = M[G][H]$ .

Beweis: Die Generizität folgt aus der Vollständigkeit der Einbettung  $i$ . Dann rechnet man nach, dass  $H$  ein Filter ist. Dann rechnet man mit Namen für dichte Teilmengen von  $\pi_G$  nach, dass  $H$  alle dichten Teilmengen schneidet. Dann zeigt man  $K \subseteq G * H$  und  $G * H \subseteq K$ .  $M[G][H] = M[K]$  folgt aus den Minimalitätseigenschaften.

**Lemma 12.6.** Sei  $\kappa \in M$  eine reguläre Kardinalzahl in  $M$ , und sei  $P \in M$  eine Quasiordnung mit der  $\kappa$ -Ketteneigenschaft. Sei  $\sigma \in M$  ein  $P$ -Name für

$$1 \Vdash_P \sigma \subseteq \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \kappa.$$

Dann gibt es ein  $\beta < \kappa$ , so dass  $1 \Vdash \sigma \subseteq \beta$ .

Beweis: Wie der Beweis von c.c.c. erhält Konfinalitäten.

**Lemma 12.7.** Sei  $P \in M$  eine Quasiordnung, sei  $\pi \in M$  ein  $P$ -Name für eine Quasiordnung, sei  $\kappa$  eine reguläre Kardinalzahl in  $M$ , ( $P$  habe die  $\kappa$ -c.c.) <sup>$M$</sup>  und  $1 \Vdash \pi$  hat die  $\kappa$ -c.c.. Dann ( $P * \pi$  hat die  $\kappa$ -c.c.) <sup>$M$</sup> .

Beweis. Wir nehmen an, dass  $\{\langle p_\xi, \tau_\xi \rangle \mid \xi < \kappa\}$  eine Antikette in  $P * \pi$  wäre und leiten einen Widerspruch her. Sei  $\sigma = \{\langle \check{\xi}, p_\xi \rangle \mid \xi < \kappa\}$ . Dann ist  $\sigma$  ein  $P$ -Name in  $M$  mit  $1 \Vdash \sigma \subseteq \check{\kappa}$ . Für einen  $P$ -generischen Filter  $G$  ist dann  $\sigma_G = \{\xi < \kappa \mid p_\xi \in G\}$ . Wir zeigen, in  $M[G]$  folgendes gilt: Für  $\xi, \xi' \in \sigma_G$  ist  $\tau_{\xi, G} \perp_\pi \tau_{\xi', G}$ . Sonst gäbe es einen Namen  $\varrho$  und eine Bedingung  $q \leq p_\xi, p_{\xi'}$  so dass  $q \Vdash \varrho \leq_\pi \tau_\xi \wedge \varrho \leq_\pi \tau_{\xi'}$ , im Gegensatz dazu, dass wir mit einer Antikette begannen. Da  $1 \Vdash \pi$  hat die  $\kappa$ -c.c., ist  $|\sigma_G| < \kappa$  in  $M[G]$  für jeden  $P$ -generischen Filter  $G$ . Daher ist  $1 \Vdash |\sigma| < \check{\kappa}$ . Nach dem vorigen Lemma gibt es nun ein  $\beta < \kappa$ , so dass  $1 \Vdash \sigma \subseteq \check{\beta}$ . Dies widerspricht  $p_\beta \Vdash \check{\beta} \in \sigma$ .

**Definition 12.8.** Sei  $\alpha$  eine Ordinalzahl in  $M$  und sei  $J \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$  ein Ideal auf  $\alpha + 1$ , so dass  $J$  alle endlichen Teilmengen von  $\alpha$  enthält. Eine Iteration der Länge  $\alpha$  mit Trägern in  $J$  ist ein Objekt der Form:

$$\langle \langle \langle P_\xi, \leq_\xi, 1_\xi \rangle \mid \xi \leq \alpha \rangle, \langle \langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, 1_{\pi_\xi} \rangle \mid \xi < \alpha \rangle \rangle,$$

das die folgenden Eigenschaften hat: Jedes  $P_\xi$  ist eine Quasiordnung mit Elementen, die  $\xi$ -Folgen sind. Für  $p \in P_\xi$  und  $\eta < \xi$  ist  $p \upharpoonright \eta \in P_\eta$ . Jedes  $\pi_\xi$  ist ein  $P_\xi$ -name für eine Quasiordnung. Wenn  $\langle \varrho_\eta \mid \eta < \xi \rangle \in P_\xi$ , dann ist jedes  $\varrho_\eta \in \text{dom}(\pi_\eta)$ .  $1_{P_\xi}$  ist die Folge  $\langle 1_{\pi_\eta} \mid \eta < \xi \rangle$ . Wir setzen  $\text{supt}(\langle \varrho_\eta \mid \eta < \xi \rangle) = \{\eta < \xi \mid \varrho_\eta \neq 1_{\pi_\eta}\}$ , diese Menge heißt der Träger von

$\langle \varrho_\eta \mid \eta < \xi \rangle$ . Die Halbordnungen  $P_\xi$ ,  $\xi \leq \alpha$  werden durch transfinite Rekursion definiert:

Anfang:  $P_0 = \{0\}$ .

Nachfolger:  $p \in P_{\xi+1}$ , wenn  $p = \langle \varrho_\eta \mid \eta < \xi+1 \rangle$  und  $p \upharpoonright \xi \in P_\xi$ ,  $\varrho_\xi \in \text{dom}(\pi_\xi)$  und  $p \upharpoonright \xi \Vdash_{P_\xi} \varrho_\xi \in \pi_\xi$ .  $p' \leq p$ , wenn  $p' \upharpoonright \xi \leq_{P_\xi} p \upharpoonright \xi$  und  $p' \upharpoonright \xi \Vdash_{P_\xi} \varrho'_\xi \leq_{\pi_\xi} \varrho_\xi$ .

Limes: Sei  $\eta$  eine Limesordinalzahl, und sei  $p = \langle \varrho_\delta \mid \delta < \eta \rangle$ . Dann ist  $p \in P_\eta$  wenn für alle  $\delta < \eta$ ,  $p \upharpoonright \delta \in P_\delta$  und  $\text{supt}(p) \in J$ . Für  $p', p \in P_\eta$  ist  $p' \leq_{P_\eta} p$  wenn für alle  $\delta < \eta$ ,  $p' \upharpoonright \delta \leq_{P_\delta} p \upharpoonright \delta$ .

**Definition 12.9.** Wenn  $J$  die Menge der endlichen Teilmengen von  $\alpha$  is, dann heißt die Iteration Iteration mit endlichen Trägern oder auch Iteration mit direkten Limiten. Wenn  $J$  die Menge der höchsten abzählbaren Teilmengen von  $\alpha$  ist, dann heißt die Iteration Iteration mit abzählbaren Trägern, englisch c.s.i. countable support iteration. Wenn  $J$  die volle Potenzmenge von  $\alpha$  ist, spricht man von einer Iteration mit vollen Trägern oder indirekten Limiten.

**Definition 12.10.** Sei die Notation wie in 12.8. Für  $\xi \leq \eta \leq \alpha$  definieren wir  $i_{\xi,\eta}: P_\xi \rightarrow P_\eta$ , so dass  $i_{\xi,\eta}(p) = p'$  mit  $p' \upharpoonright \xi = p$  und  $p'(\mu) = 1_{\pi_\mu}$  für  $\xi \leq \mu < \eta$ .

Induktiv über  $\eta$  zeigt man, dass  $i_{\xi,\eta}$  wohldefiniert ist.

**Lemma 12.11.** Sei  $\xi \leq \eta \leq \zeta \leq \alpha$ .

- (a)  $i_{\xi,\zeta} = i_{\eta,\zeta} \circ i_{\xi,\eta}$ .
- (b)  $i_{\xi,\eta}(1_{P-\xi}) = 1_{P_\eta}$ .
- (c)  $\forall p, p' \in P_\eta (p \leq p' \rightarrow p \upharpoonright \xi \leq p' \upharpoonright \xi)$
- (d)  $\forall p, p' \in P (p \leq p' \leftrightarrow i_{\xi,\eta}(p) \leq i_{\xi,\eta}(p'))$ .
- (e)  $\forall p, p' \in P_\eta (p \upharpoonright \xi \perp p \upharpoonright \eta \rightarrow p \perp p')$ .
- (f)  $\forall p, p' \in P_\eta (\text{supt}(p) \cap \text{supt}(p') \subseteq \xi \rightarrow (p \upharpoonright \xi \perp p' \upharpoonright \xi \leftrightarrow p \perp p'))$ .
- (g)  $\forall p, p' \in P_\xi (p \perp p' \leftrightarrow i_{\xi,\eta}(p) \perp i_{\xi,\eta}(p'))$ .
- (h)  $i_{\xi,\eta}$  ist eine vollständige Einbettung von  $P_\xi$  in  $P_\eta$ .

**Lemma 12.12.** Sei in  $M$   $\kappa$  eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl, und sei

$$\langle \langle \langle P_\xi, \leq_\xi, 1_\xi \rangle \mid \xi \leq \alpha \rangle, \langle \langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, 1_{\pi_\xi} \rangle \mid \xi < \alpha \rangle \rangle,$$

eine Iteration der Länge  $\alpha$  mit endlichen Trägern und gelte

$$1 \Vdash_{P_\xi} \pi_\xi \text{ hat die } \check{\kappa}\text{-c.c.c}$$

Dann hat jedes  $P_\xi$  die  $\kappa$ -c.c. in  $M$ .

Beweis: Induktiv über  $\alpha$ . Für die Nachfolgerschritte nimmt man Lemma 12.7. In den Limesritten nutzt man die Endlichekeit der Träger: Sei  $\{p_\xi \mid \xi < \omega_1\}$  eine Menge von Bedingungen. Nach dem Deltasystemlemma gibt es eine Wurzel  $r$  für  $\{\text{dom}(p_\xi) \mid \xi < \omega_1\}$ . Das Maximum  $\beta$  von  $r$  ist  $< \alpha$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $\xi \neq \zeta$ , so dass  $p_\xi \upharpoonright (\beta+1)$  und  $p_{\xi'} \upharpoonright (\beta+1)$  verträglich sind. Dann sind auch  $p_\xi$  und  $p_\zeta$  verträglich nach Lemma 12.11 Teil (f).  $\square$

**Lemma 12.13.** *Sei in  $M$*

$$\langle\langle P_\xi, \leq_\xi, 1_\xi \mid \xi \leq \alpha \rangle, \langle\langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, 1_{\pi_\xi} \mid \xi < \alpha \rangle\rangle\rangle,$$

eine Iteration der Länge  $\alpha$ . Sei  $G$   $P_\alpha$ -generisch über  $M$ . Für  $\xi < \alpha$  sei  $G_\xi = (i_{\xi, \alpha}^{-1})''G$ . Dann ist  $G_\xi$   $P_\xi$ -generisch über  $M$  und  $\xi \leq \eta \rightarrow M[G_\xi] \subseteq M[G_\eta]$ . Sei  $Q_\xi = (\pi_\xi)_{G_\xi}$  und sei

$$H_\xi = \{ \varrho_{G_\xi} \mid \varrho \in \text{dom}(\pi_\xi) \wedge \exists pp \hat{\varrho} \in G_{\xi+1} \}.$$

Dann ist  $H_\xi \in M[G_{\xi+1}]$  und  $H_\xi$  ist  $Q_\xi$ -generisch über  $M[G_\xi]$ .

zu tun

**Lemma 12.14.** *Sei in  $M$   $\alpha$  eine Limesordinalzahl, und sei*

$$\langle\langle P_\xi, \leq_\xi, 1_\xi \mid \xi \leq \alpha \rangle, \langle\langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, 1_{\pi_\xi} \mid \xi < \alpha \rangle\rangle\rangle,$$

eine Iteration der Länge  $\alpha$  mit Trägern in  $J$ , und sei jedes Element von  $J$  beschränkt in  $\alpha$ . Sei  $G_\alpha$  generisch über  $M$ ,  $S \in M$ ,  $X \subseteq S$ ,  $X \in M[G]$  und  $|S| < \text{cf}(\alpha)^{M[G]}$ . Dann gibt es ein  $\eta < \alpha$ ,  $X \in (i_{\eta, \alpha}^{-1})''G$ .

zu tun

**Satz 12.15.**  $\text{MA}(\kappa)$  ist äquivalent zu seiner Einschränkung auf partielle Ordnungen des Mächtigkeit  $\kappa$ .

Beweis: Wir nehmen die eingeschränkte Form an. Sei  $Q$  eine c.c.c Halbordnung beliebiger Mächtigkeit, und seien  $D_i$ ,  $i < \kappa$  dichte Mengen in  $Q$ . Wir bilden eine kleine  $\subseteq_{ic}$ -Unterhalbordnung  $P$  von  $Q$ , so dass jedes  $D_i$  schon in  $P$  dicht ist.  $\subseteq_{ic}$  steht für "incompatibility preserving": Seien  $p, q \in P$ , wenn  $p \not\leq q$  in  $Q$ , so soll es schon einen Verträglichkeitszeugen in  $P$  geben. Man hat also: Wenn  $p, q$  in  $P$  inkompatibel sind, so auch in  $Q$ . Hierzu kann man den absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem auf die Struktur  $(Q, \leq_Q, (D_i)_{i \in \kappa})$  anwenden. Jede elementare Substruktur  $(P, \leq_Q \cap P^2, (D_i \cap P)_{i \in \kappa})$  mit  $|P| \leq \kappa$  ist von der gewünschten Art.

Nun hat auch  $P$  die c.c.c. Die eingeschränkte Version von Martins Axiom liefert einen  $P$ -generischen Filter, der jedes  $D_i$  schneidet.  $\square$

Unverträglichkeitserhaltende Unterhalbordnungen stehen zwischen allgemeinen Unterhalbordnungen und vollständigen Unterhalbordnungen. Wir haben also bei den Inklusionsrelationen zweier Halbordnungen folgende Kette von Eigenschaften:

$$\subseteq_d \rightarrow \subseteq_c \rightarrow \subseteq_{ic} \rightarrow \subseteq.$$

**Lemma 12.16.** *Für jede unendliche Kardinalzahl  $\lambda$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1)  $\text{MA}(\lambda)$ .
- (2) Wenn  $Q(\lambda, W)$  und  $\mathcal{D}$  eine Familie von  $\leq \lambda$  dichten Mengen in  $(\lambda, W)$  ist, dann gibt es einen Filter auf  $(\lambda, W)$  der jedes  $D \in \mathcal{D}$  schneidet.

Beweis: Klar nach dem vorigen Satz, es kommt ja nur auf den Isomorphietyp der Halbordnungen an.

**Definition 12.17.** Sei  $\sigma \in M^P$ .  $\tau$  heißt ein netter Name für eine Teilmenge von  $\sigma$  gdw es Antiketten  $A_\pi$  für  $\pi \in \text{dom}(\sigma)$  gibt so dass  $\tau = \{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \text{dom}(\sigma)\}$ .

$\text{pord}(\lambda, W)$  sei die Abkürzung für die Aussage  $(\lambda, W)$  ist ein c.c.c. Quasiordnung. Diese Aussage ist nur abwärts absolut, denn in Erweiterungsmodellen können überabzählbare Antiketten sein.

**Satz 12.18.** Sei in  $M$ ,  $\kappa \geq \omega_1$  eine reguläre Kardinalzahl, und  $2^{<\kappa} = \kappa$ . Dann gibt es eine Quasiordnung  $P \in M$ , so dass  $P$  die c.c.c in  $M$  hat und dass in  $M[G]$  Martins Axiom für  $< \kappa$  viele dichte Mengen gilt und dass  $2^\omega = \kappa$ .

Beweis: Wir halten ein Funktion  $f: \kappa \rightarrow \kappa \times \kappa$  in  $M$  fest mit der folgenden Eigenschaft

$$\forall \xi, \eta, \gamma < \kappa (f(\xi) = \langle \eta, \gamma \rangle \rightarrow \eta \leq \xi).$$

(Überlegen Sie sich, warum es so eine Funktion gibt.)  $f$  wird später als sogenannte Buchhaltungsfunktion benutzt.

Wir konstruieren in  $M$  eine Iteration mit endlichen Trägern

$$\langle \langle P_\xi \leq_\xi, 0_\xi \rangle, \xi \leq \kappa \rangle, \langle \langle \check{\lambda}_\xi, \sigma_\xi, \check{0} \rangle \mid \xi < \kappa \rangle \rangle.$$

In der Nomenklatur der Definition eines iterierten Forcings 12.8 ist also  $\langle \pi_\xi, \leq_{\pi_\xi}, 1_{\pi_\xi} \rangle$  nun von der Form  $\langle \check{\lambda}_\xi, \sigma_\xi, \check{0} \rangle$ . Die Wahl von  $(\lambda_\xi, \sigma_\xi)$  muss nun sorgfältig getroffen werden, denn wir wollen im Lauf der Iteration alle c.c.c. Halbordnungen auf allen  $\lambda < \kappa$  (in  $M[G]$ , aber wir werden sie zum Glück von  $M$  aus prognostizieren können) abdecken. In der Konstruktion gilt an jeder Stelle  $\xi < \kappa$ :

- (1)  $1_\xi \Vdash_{P_\xi} \text{pord}(\check{\lambda}_\xi, \sigma_\xi)$  und
- (2)  $\lambda_\xi < \kappa$ .

(1) und (2) werden im Laufe der induktiven Definition gezeigt. Nach (1) und Lemma 12.14 wird für jedes  $\xi < \kappa$   $P_\xi$  eine c.c.c. Halbordnung in  $M$  sein. Mit (2) und der Voraussetzung  $2^{<\kappa} = \kappa$  zeigt man durch Induktion über  $\xi < \kappa$ , dass  $|P_\xi| < \kappa$  und  $|P_\kappa| = \kappa$ . Dieses wiederum wird wichtig sein, um die Anzahl der netten  $P_\xi$ -Namen für Halbordnungen auf  $\lambda_\xi$  nach oben abzuschätzen. Es sind zum Beispiel  $\leq (\kappa^\omega)^{\lambda \times \lambda} \leq \kappa$  viele nette  $P_\kappa$ -Namen für Halbordnungen auf  $\lambda$  für  $\lambda < \kappa$ . Ebenso gibt es genau  $\kappa$  viele reelle Zahlen in  $M[G_\kappa]$ .

Zur Wahl von  $\lambda_\xi$  und  $\sigma_\xi$ :  $P_\xi$  ist gegeben. Wir nehmen in  $M$  eine Aufzählung  $\langle \langle \lambda_\gamma^\xi, \sigma_\gamma^\xi \rangle \mid \gamma < \kappa \rangle$  der Paare  $\langle \lambda, \sigma \rangle$ , so dass  $\lambda < \kappa$ ,  $\lambda$  Kardinalzahl und  $\sigma$  ein netter  $P_\xi$ -Name für eine Teilmenge von  $\lambda \times \lambda$  ist. (Wir werden aus diesen Teilmengen dann die c.c.c. Halbordnungen herausuchen.) Wir können die  $\kappa$  vielen Aufgaben nun nicht im einzigen Schritt  $\xi$  ausführen. Daher verteilen wir die  $\kappa$  mal  $\kappa$  vielen Aufgaben über alle Schritte  $\xi$ . Das bedeutet, dass wir im Schritt  $\xi$  es mit  $\sigma_\gamma^\eta$  zu tun haben für ein  $\eta \leq \xi$ . Hier nutzen wir die Buchhaltungsfunktion, die jeden Namen einmal aufruft (zu genügend später Zeit, d.h., wenn genügend viel von der Halbordnung schon konstruiert ist).

Sei  $f(\xi) = \langle \eta, \gamma \rangle$ . Das  $\eta \leq \xi$  ist ist der  $P_\eta$ -Name  $\sigma_\gamma^\eta$  definiert. Sei nun  $\sigma$  der hochgehobene  $P_\xi$ -Name  $i_{\eta, \xi}^*(\sigma_\gamma^\eta)$ , und sei  $\lambda = \lambda_\gamma^\eta$ . Wir setzen  $\lambda_\xi = \lambda$ .  $\sigma$  war zur Zeit  $P_\eta$  vielleicht ein c.c.c. Name, wir wissen es nicht.

Aber entscheidend ist, ob es nun zur Zeit  $\xi$  ein Name fuer eine c.c.c. Halbordnung ist. Da wir auch dieses nicht wissen, nehmen wir für  $\sigma_\xi$  einen  $P_\xi$ -Namen so dass

$$1_{P_\xi} \Vdash_{P_\xi} \text{pord}(\check{\lambda}, \sigma_\xi) \wedge (\text{pord}(\check{\lambda}, \sigma) \rightarrow \sigma_\xi = \sigma). \quad (\heartsuit)$$

Da

$$P_\xi \Vdash_{P_\xi} \exists W (\text{pord}(\check{\lambda}, W) = \wedge \text{pord}(\check{\lambda}, \sigma) \rightarrow W = \sigma).$$

So einen Namen  $W$  gibt es, da man immer die c.c.c. Halbordnung  $\lambda \times \lambda$  auf  $\lambda$  nehmen kann (diese ist Forcing-äquivalent, also dicht einbettbar in die Einpunkt-Halbordnung). Nach dem Maximumprinzip gibt es dann den Namen  $\sigma_\xi$ . mit  $(\heartsuit)$ .

Also haben wir die Konstruktion vollständig definiert. Nun sei  $P_\kappa = P$  und sei  $G$  ein  $P$ -generischer Filter über  $M$ . Wir rechnen nun nach, dass für  $\lambda < \kappa$  in  $M[G]$   $\text{MA}(\lambda)$  gilt. Daher ist  $2^\omega > \lambda$  für alle  $\lambda < \kappa$  und somit  $2^\omega = \kappa$  in  $M[G]$ .

Sei nun in  $M[G]$   $\lambda < \kappa$  eine Kardinalzahl und sei  $W \subseteq \lambda \times \lambda$  eine c.c.c. Halbordnung und sei  $\mathcal{D}$  eine Familie von  $\leq \lambda$  vielen dichten Mengen in  $(\lambda, W)$ .- Wir zeigen, dass es einen Filter auf der Halbordnung  $(\lambda, W)$  gibt in  $M[G]$ , der alle  $D \in \mathcal{D}$  schneidet.

Für  $\xi \leq \kappa$  sei  $G_\xi = i_{\xi, \kappa}^{-1} G$  es gibt ein  $\eta < \kappa$ , so dass  $W$  und  $\mathcal{D}$  in  $M[G_\eta]$  sind. Für  $W$  folgt dies aus Lemma 12.14 für  $\mathcal{D} = \{D_\mu \mid \mu < \lambda\}$  folgt dies aus der Anwendung desselben Lemmas auf  $\{\langle \mu, \nu \rangle \in \lambda \times \lambda \mid \nu \in D_\mu\}$ .

Wir halten so ein  $\eta$  fest. Dann halten wir  $\gamma$  fest, so dass  $W = \text{val}(\sigma_\gamma^\eta, G_\eta)$ , und wir halten  $\xi \geq \eta$  fest, so dass  $f(\xi) = \langle \eta, \gamma \rangle$ . Sei  $\sigma = i_{\eta, \xi, *}( \sigma_\gamma^\eta )$ . Dann ist nach dem Lemma 10.9. (a)  $W = \sigma_{G_\xi}$  und  $\mathcal{D} \in M[G_\xi]$  und  $\mathcal{D}$  ist eine Familie dichter Mengen in  $W$  in  $M[G_\xi]$  nach Lemma 10.9 (b). In  $M[G]$  und auch in  $M[G_\xi]$  gilt  $\text{pord}(\lambda, W)$ . Denn wenn  $W$  in  $M[G_\xi]$  nicht c.c.c. wäre, gäbe es dort ein überabzählbare Antikette für  $W$ , und diese bleibt eine überabzählbare Antikette auch im Modell  $M[G]$ , da das Restforcing von  $\xi$  bis  $\kappa$  auch c.c.c. ist.

Nach  $(\heartsuit)$  ist

$$1 \Vdash_{P_\xi} \text{pord}(\check{\lambda}, W) \rightarrow \sigma_\xi = \sigma$$

, also ist  $W = (\sigma_\xi)_{G_\xi}$ , und daher enthält nach der Konstruktion  $M[G_{\xi+1}]$  einen Filter  $H_\xi$  als Element, der  $(\lambda, W)$  generisch für  $\mathcal{D}$  ist über  $M[G_\xi]$  ist.

Wir bemerken noch, dass die Auswahlen

$$\langle \langle \lambda_\gamma^\xi, \sigma_\gamma^\xi \rangle \mid \gamma < \kappa \rangle$$

in jedem Schritt  $\xi$  Wohlordnungen auf Mengen in  $H(\kappa^+)$  wählen. All diese Wohlordnungen können simultan gewählt werden, wenn man eine Wohlordnung  $<_{\kappa^+}$  auf  $H(\kappa^+)$  in  $M$  fixiert, und alle vorkommenden Mengen, die ja als Elemente von  $H(\kappa^+)$  auch Teilmengen von  $H(\kappa^+)$  sind, mit dieser Wohlordnung anordnet und die dadurch bestimmten aufsteigenden Aufzählungen nimmt.  $\square$

**Korollar 12.19.**  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + 2^\omega = \aleph_{17} + \text{MA})$

## Kapitel 13

# Entstehung

Die erste Version (ohne  $\mathbf{L}$  und ohne iteriertes Forcing) entstand in den Jahren Winter 2003 bis Sommer 2006 in Wien. Ich danke den Hörern Dr. Andrew Brooke-Taylor, Dr. Ajdin Halilović, Dr. Peter Holy und Fabian Linzberger für zahlreiche Hinweise auf Fehler im Skript. Im Sommer 2011 in Freiburg fand Herr Christoph Betz zahlreiche Ungereimtheiten im Skript.



# Literaturverzeichnis

- [1] Andreas Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. In James Baumgartner, Donald Martin, and Saharon Shelah, editors, *Axiomatic set theory*, volume 31 of *Contemporary Math.*, pages 31–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [2] Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Crelles Journal f. Mathematik*, 77:258–262, 1874.
- [3] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten V. *Mathematische Annalen*, 21:545 – 591, 1883.
- [4] Georg Cantor. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Mathematica*, 4:381 – 392, 1884.
- [5] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten VI. *Mathematische Annalen*, 23:453 – 488, 1884.
- [6] Keith Devlin. *Constructibility*. Omega Series. Springer, 1980.
- [7] William Easton. Powers of regular cardinals. *Annals of Math. Logic*, 1:39–78, 1970.
- [8] H.-D. Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre*. Hochschultaschenbuch, 4 edition, 2003.
- [9] Herbert Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1977.
- [10] Géza Fodor. Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. *Acta Scientia Math. Szeged*, 17:139–142, 1956.
- [11] Kurt Gödel. The consistency of the Axiom of Choice and the General Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24:556–557, 1938.
- [12] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik*, 38:173–198, 1938.
- [13] Paul Halmos. *Lectures on Boolean Algebras*. Springer, 1974.
- [14] Thomas Jech. *The Axiom of Choice*. North Holland, 1973.
- [15] Thomas Jech. *Set Theory*. Addison Wesley, 1978.

- [16] Thomas Jech. *Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer, 2003.
- [17] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2 edition, 2009.
- [18] Laurie Kirby and Jeff Paris. Accessible independence results for peano-arithmetic. *Bull. London Math.Soc.*, 14:285–293, 1982.
- [19] Denés König. Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta Litter. Acad. Sci. Hung.*, 3:121–130, 1927.
- [20] Julius König. Zum Kontinuumproblem. *Math. Ann.*, 60:177–180, 1905.
- [21] Kenneth Kunen. *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland, 1980.
- [22] Duro Kurepa. Ensembles ordonnés et ramifiés. *Publ. Math. Univ. Belgrade*, 4:1–138, 1935.
- [23] Azriel Levy. *Basic Set Theory*. Springer, 1979.
- [24] Frank P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 30:264–286, 1930.
- [25] H. Rubin and Jean Rubin. *Equivalents of the Axioms of Choice*. North Holland, 1963.
- [26] Saharon Shelah. Can you take solovay’s inaccessible away? *Israel Journal of Mathematics*, 48:1–47, 1984.
- [27] Jack Silver. On the singular cardinal problem. In *Proc. Int. Congr. Math. Vancouver*, volume 35, pages 60–64, 1970.
- [28] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, second edition edition, 2009.
- [29] Robert Solovay. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. Math.*, 92:1–56, 1970.
- [30] Ernst Specker. Sur un problème de Sikorski. *Colloq. Math.*, 2:9–12, 1951.
- [31] Otmar Spinas. *Mengenlehre*. <http://www-computerlabor.math.uni-kiel.de/spinas>. Universität Kiel, 2002.
- [32] Alfred Tarski. *Undecidable theories*. In collaboration with Andrzej Mostowski and Raphael M. Robinson. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland Publishing Co., second printing edition, 1968.
- [33] Ernst Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Math. Ann.*, 59:514–516, 1904.

- 
- [34] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Math. Ann.*, 65:261–681, 1908.
- [35] Martin Ziegler. *Mengenlehre*. <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler>. Universität Freiburg, 1996.
- [36] Martin Ziegler. *Forcingweiterungen*. <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler>. Universität Freiburg, 2005.
- [37] Max Zorn. A remark on a method in transfinite algebra. *Bull. Amer. Math. Soc. N.S.*, 41:667–670, 1935.

# Index

- $< \omega_1$ -abgeschlossen, 89
- $A(\alpha)$ , 15
- $M[G]$ , 62
- $P$ -Name, 61
- $P$ -generisch über  $M$ , 60
- $P * \pi$ , 93
- $\text{Sigma}_2^1$ , 49
- AC, 2
- Aus, 2
- BS, 39
- CH, 28
- $\Delta$ -System-Lemma, 74
- $\Delta_0$ -Formel, 38
- $\Delta_1^F$ , 42
- Ers, 2
- Ex, 1
- Ext, 2
- Fund, 2
- GCH, 28
- Inf, 2
- $\text{Lv}'(\kappa)$ , 91
- $\text{Lv}(\kappa)$ , 91
- NBG, 3
- PA, 20
- Paar, 2
- $\Pi_n$ , 38
- Pot, 2
- $\Sigma_n$ , 38
- $\Sigma_n$ -Erfüllung, 40
- Ver, 2
- ZFC, 1
- $\mathbf{L}$ , 37
- $\mathbf{V}^P$ , 62
- $\bigcup$ , 2, 5
- $\cap$ , 5
- cf, 28
- $\hat{\phantom{x}}$ , 18
- $\cong$ , 7
- $\cup$ , 5
- $\diamond$ , 89
- $\text{dom}(\tau)$ , 62
- $\text{fr}(\varphi)$ , 1
- $\omega$ , 15
- $\prec$ , 21
- $\preceq$ , 21
- $|$ , 6
- $\setminus$ , 5
- $\mathbf{Q}$ , 20
- $\sim$ , 21
- $\xrightarrow{\text{konf}}$ , 28
- $\rightarrow_c$ , 83
- $\text{val}(\tau, G)$ , 62
- $f''C$ , 6
- $f[C]$ , 6
- $\mathbf{V}$ , 4
- $\mathcal{H}(\omega_1)$ , 23
- $\mathcal{D}$ -generisch, 60
- $\mathcal{F}$ -invariant, 80
- $\mathcal{L}(\tau)$ , 1
- $\text{FN}_{<\omega}(X, 2)$ , 59
- $\text{Fn}(I, J, \lambda)$ , 73
- $\text{RO}(P)$ , 86
- $\text{th}(x)$ , 12
- überabzählbar, 23
- supt, 94
  
- abgeschlossen, 31
- absolut, 42
- abzählbar, 23
- allgemeine Kontinuumshypothese, 28
- Allklasse, 4
- Antikette, 60
- Assoziativgesetz, 16
- atomare Formel, 1
- Ausahlfunktion, 9
- Auswahlaxiom, 2
- Automorphismus, 79

- basic set theory, 39
- Basis eines Vektorraums, 11
- Bedingung, 59
- Bernays, 3
- bijektiv, 6
- Bildbereich, 6
- Bildmenge, 4
- Burali-Forti, 14
- Cantor, 24
- Cantor'sche Normalform, 19
- Cantor, Schröder, Bernstein-Satz, 21
- club, 31
- countable support iteration, 95
- Dedekind, 21
- definierbar in  $(M, \in)$ , 37
- Definitionsbereich, 6
- Diagonalschnitt, 32
- Diagonalvereinigung, 32
- diamond, 89
- dicht unter  $p$ , 60
- dichte Einbettung, 84
- Distributivgesetz, 18
- echte Klasse, 3
- endlich, 23
- erblich, 12
- erblich symmetrisch (bezüglich  $\mathcal{F}$ ), 80
- extensionale Relation, 54
- Feinstrukturetheorie, 50
- Filter, 60
- Filter auf einer Gruppe, 79
- Fodor, 32
- Forcing-Sprache, 65
- Fraenkel, 1
- Fragment, 42
- freie Variable, 1
- fundiert, 10
- fundierte Relation, 12
- Funktion, 6
- Gödel, 3
- Gödels  $\mathbf{L}$ , 37
- geordnetes Paar, 5
- gleichmächtig, 21
- Halbordnung, 7, 58
- Hartogs, 25
- Hessenberg, 23
- indirekte Limiten, 95
- Induktionsaxiom, 20
- induktive Halbordnung, 11
- injektiv, 6
- inkompatibel, 59
- Irreflexivität, 7
- isomorph, 7
- Iteration der Länge  $\alpha$ , 94
- Iteration mit abzählbaren Trägern, 95
- Iteration mit direkten Limiten, 95
- Iteration mit endlichen Trägern, 95
- Julius König, 30
- Kardinalität, 22
- Karo, 89
- Kern eines  $\Delta$ -Systems, 74
- Kernmodelle, 50
- Kette, 11
- Klasse, 3
- Klassenforcing, 61
- Kollektionsprinzip, 39
- kompatibel, 59
- konfinale Abbildung, 28
- Konfinalität, 28
- Konjunkt, 1
- Konkatenation, 18
- konstruktible Menge, 37
- Kontinuumshypothese, 28
- Löwenheim, 47
- Lévy-Hierarchie, 38
- Lévy-Kollaps, 91
- Limeskardinalzahl, 25
- lineare Ordnung, 6
- Mächtigkeit, 22
- mengenähnlich, 51
- Mengenforcing, 61
- Mengenuniversum, 4
- Mostowski-Kollaps, 53
- Mostowski-Operation, 53
- Mostowskikollaps, 46
- Nachfolgerkardinalzahl, 25

- Nachfolgerordinalzahl, 15  
 natürliche Zahl, 15  
 nette Namen für Teilmengen, 97  
 normaler Filter von Untergruppen, 80  
  
 offen, 65  
 Operation, 9, 52  
 ordinale Addition, 16  
 ordinale Exponentiation, 19  
 ordinaler Nachfolger, 15  
 Ordinalzahl, 13  
  
 Paarmenge, 4  
 partielle Ordnung, 7, 58  
 Peano-Arithmetik, 20  
 Peano-Axiome, 15  
 präadicht, 84  
 projektive Hierarchie, 49  
  
 Quantor, 1  
 Quasiordnung, 58  
  
 Rang, 53  
 Rasiowa und Sikorski, 60  
 rechts-distributiv, 18  
 Reduktion, 83  
 Reflexionssatz, 41  
 reglär und offen, 86  
 reguläre Ordinalzahl, 29  
 Relation, 6  
 Robinsons  $Q$ , 20  
 Russell'sche Antinomie, 4  
  
 schwächtiger, 21  
 schwach unerreichbar, 29  
 separativ, 87  
 Silver, 34  
 singuläre Ordinalzahl, 29  
 Skolem, 47  
 Skolemfunktion, 47  
 Solovay, 33  
 stark unerreichbar, 30  
 stationär, 32  
 strongly inaccessible, 30  
 surjektiv, 6  
  
 Tarski, 40  
 totale Ordnung, 6  
  
 Träger einer Bedingung, 95  
 transfiniten Induktion, 9  
 transfiniten Rekursion, 9  
 transitiv, 12, 13  
 transitive Hülle, 12  
 transitive Menge, 12, 13  
 Transitivität, 7  
 Trichotomie, 7  
  
 unbeschränkt, 31  
 unendlich, 23  
 unverträglich, 59  
  
 Variable, 1  
 Vereinigungsmenge, 4  
 verträglich, 59  
 vollständige Einbettung, 83  
 von Neumann, 3, 15  
 Vorgängermenge, 7  
  
 Wahrheitswert, 87  
 weakly inaccessible, 29  
 Wohlordnung, 7  
 Wohlordnungssatz, 9  
 Wurzel eines  $\Delta$ -Systems, 74  
  
 Zermelo, 1  
 Zorn, 11