Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 0 [Anwesenheitsaufgaben]
19.04.2016

Aufgabe 1. Die Einwohner des Planets Z sind rot oder blau. Es gibt vier Sorten: in der nördlichen Hemisphäre sagen die blauen Einwohner immer die Wahrheit, die roten das Falsche. Im Gegensatz dazu lügen die blauen Südländer immer und sagen die roten Südländer immer die Wahrheit.

- A ist ein Nordländer und C kommt aus dem Süden. A sagt: "C und ich haben die gleiche Farbe". C sagt: "A und ich haben verschiedene Farben". Wer hat Recht? Welche Farben haben A und C?
- Ein Logiker besucht Z und in der Nacht fragt er einen Einheimischen, ob er ein blauer Nordländer sei. Aus der Antwort kann der Logiker keine der beiden Eigenschaften des Befragten erschließen. Ein zweiter Logiker trifft denselben Einwohner und fragt ihn, ob er ein blauer Südländer sei, aber auch der zweite Logiker kann keine der Eigenschaften des Befragten erschließen. Endlich kommt ein Logiker aus Freiburg und fragt, ob der Einwohner ein roter Südländer sei. Leider kann der dritte Logiker auch nichts festlegen. Woher kommt und welche Farbe hat der Einwohner? (Die Logiker kennen immer nur die Antwort ihrer Befragung.)

Aufgabe 2. Sei $\mathrm{S} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \boxplus, \circ, \mathtt{P}, \lhd\}$; dabei seien $\mathtt{0}, \mathtt{1}$ Konstantenzeichen, $\boxplus, \circ$ zweistellige Funktionszeichen und $\mathtt{P}$ ein einstelliges und $\lhd$ ein zweistelliges Relationszeichen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als S-Struktur $\mathfrak{N}$, indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren:

$$\mathtt{0}^{\mathfrak{N}} = 0,\ \mathtt{1}^{\mathfrak{N}} = 1,\ \boxplus^{\mathfrak{N}} = +,\ \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot,\ \mathtt{P}^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\},\ \lhd^{\mathfrak{N}} = <$$

Drücken Sie folgende Aussagen als S-Formeln aus:

a) Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.

b) Es gibt eine von 3 verschiedene Primzahl.

c) Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.

d) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

e) Es gibt genau eine gerade Primzahl.

f) Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge[1].

Aufgabe 3. Sei $\mathrm{L} = \{P, R, f, g, c, d\}$. Hierbei seien c, d Konstantenzeichen, g ein- und f zweistelliges Funktionszeichen, R ein- und P zweistelliges Relationszeichen.

Sind folgende Zeichenfolgen L-Terme?

$$gfgcd \qquad v_0v_2 \qquad fgfcd \qquad fv_0Rc \qquad fgcggg \qquad fv_0ffcgdfgcv_3$$

[1] Ein Primzahlzwilling ist ein Paar (p, q) von Primzahlen p, q mit $p = q + 2$

Sind folgende Zeichenfolgen L-Formeln?

$$\exists v_1 \exists v_1 R v_1 \qquad \exists d P d d \qquad \exists v_1 (P v_2 v_0 \wedge R v_0) \qquad v_2 \doteq \neg v_1 \qquad \forall v_0 \exists v_2 (P v_0 v_2)$$

Aufgabe 4. Zeichnen Sie ein Diagramm, das alle Implikationen zwischen den folgenden Formeln enthält, und begründen Sie die Fälle, in denen keine Implikation vorliegt, durch ein Beispiel, indem Sie $\varphi(x, y)$ als „x und y sind in dem gerichteten Graphen (V, E) durch eine Kante verbunden, d.h. $(x, y) \in E$" interpretieren für einen geeigneten gerichteten Graphen, den Sie am besten als Bildchen skizzieren.

$$\forall x \varphi(x, x), \qquad \forall x \forall y \varphi(x, y), \quad \forall x \exists y \varphi(x, y), \quad \forall y \exists x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \exists y \varphi(x, y), \quad \exists x \varphi(x, x), \qquad \exists x \forall y \varphi(x, y), \quad \exists y \forall x \varphi(x, y)$$

Ein gerichteter Graph (V, E) ist ein Paar, dessen erste Komponente eine nicht leere Menge V (die Menge der Vertizes) ist und dessen zweite Komponente $E \subseteq V \times V$ eine Menge von geordneten Paaren ist. (E steht für edge, Kante.) Beispiel:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$