Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 1
(19.04.2016)

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$.

- Sei $t(x, y, u, z, v) = x \cdot (y + z)$; berechnen Sie $t^{\mathfrak{A}}[1, 1, 2, 3, 5]$ und $t^{\mathfrak{A}}[2, 3, 5, 7, 11]$
- Sei $\varphi(x, y, z) = \exists x\ z \doteq x + y$. Gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[2, 1, 2]$? Gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[2, 5, 3]$?
- Sei $\theta(y) = \exists x \forall z\ x + y \doteq y$. Gilt $\mathfrak{A} \models \theta[4]$?

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine nicht-leere Teilmenge von A, die die Interpretationen $c^{\mathfrak{A}}$ aller Konstanten enthält und unter allen Operationen $f^{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen ist. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus L auf B einschränkt, erhält man eine L-Struktur $\mathfrak{B}$ eine *Unterstruktur* von $\mathfrak{A}$.

1. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$ entweder leer ist oder wieder eine Unterstruktur. Daraus folgt, dass jede nicht-leere Teilmenge S von A in einer kleinsten Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ enthalten ist, der *von S erzeugten* Unterstruktur.
2. Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-struktur mit Grundmenge A. Ein *Automorphismus* ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ mit sich selbst. Zeigen Sie: Wenn A endlich ist, gibt es auf der Grundmenge A genau

(Anzahl der Permutationen von A) : (Anzahl der Automorphismen von $\mathfrak{A}$)

viele L-Strukturen, die isomorph zu $\mathfrak{A}$ sind.

Aufgabe 4. Man zeige, dass es zu jedem Term $t(x_1, \ldots, x_n)$ der Ring-Sprache L_R ein eindeutig bestimmtes Polynom $p(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ gibt, sodaß

$$t^R[a_1, \ldots, a_n] = p(a_1, \ldots, a_n)$$

für alle kommutativen Ringe $R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$ und $a_1, \ldots, a_n \in R$.

Abgabe bis Dienstag 26.04.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur