Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 3

(03.05.2016)

Aufgabe 1. Eine *Boole'sche Algebra* $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, ^c)$ ist eine Menge B mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und Operationen $\sqcap, \sqcup : B^2 \to B$ und $^c : B \to B$, für die die folgenden Gleichungen gelten:

Idempotenz	$a \sqcap a = a$	$a \sqcup a = a$
Kommutativität	$a \sqcap b = b \sqcap a$	$a \sqcup b = b \sqcup a$
Assoziativität	$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$	$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$
Absorption	$a \sqcap (a \sqcup b) = a$	$a \sqcup (a \sqcap b) = a$
Distributivität	$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$	$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$
Null und Eins	$0 \sqcap a = 0$	$1 \sqcup a = 1$
Komplement	$a \sqcap a^c = 0$	$a \sqcup a^c = 1$

Zeigen Sie, dass die *de Morgan'schen Regeln* gelten:

$$(a \sqcap b)^c = a^c \sqcup b^c$$
$$(a \sqcup b)^c = a^c \sqcap b^c$$
$$(a^c)^c = a.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel äquivalent ist zu einer Formel in *disjunktiver Normalform* $\bigvee_{i=1}^{N} g_i$, wobei die g_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen sind. Dual dazu ist jede Formel auch äquivalent zu einer *konjunktiven Normalform* $\bigwedge_{i=1}^{N} c_i$, wobei die c_i Disjunktionen von (negierten) Variablen sind. (Hinweis: Verwenden Sie das Distributivgesetz und die de Morgan'schen Regeln)

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und E eine L-Kongruenzrelation. Dann gibt es eine L-Struktur $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/E := (B, (\tau^{\mathfrak{B}})_{\tau \in L})$, so dass $B = A/E = \{a/E : a \in A\}$ wobei $a/E := \{b \in A : aEb\}$ und:

a) $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}}/E$ für jedes Konstantensymbol $c \in L$;

b) $f^{\mathfrak{B}}(a_1/E, \cdots, a_n/E) := f^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n)/E$ für jedes Funktionssymbol $f \in L$;

c) $R^{\mathfrak{B}}(a_1/E, \cdots, a_n/E) :\Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n)$ für jedes Relationssymbol $R \in L$.

Zeigen Sie:

i) a), b) und c) sind wohldefiniert;

ii) Ist $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$?

Aufgabe 4. Es seien $\mathfrak{A}, E, \mathfrak{B}$ wie in Aufgabe 3.

i) Gibt es einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

ii) Ist $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$ in der Menge der L-Formeln ohne Gleichheitszeichen? D.h., die atomaren Formeln des Typs $t_1 = t_2$ wurden beim Aufbau der L-Formeln weggelassen.

Abgabe bis Dienstag 10.05.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur