Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 4

(10.05.2016)

Aufgabe 1. Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge von Aussagenvariabeln, und sei $L(M)$ die Menge der aussagenlogischen Formeln über M.

Zwei Formeln $\varphi, \psi \in L(M)$ heißen äquivalent (kurz $\varphi \equiv \psi$) $:\Leftrightarrow$ für alle M-Wahrheitsbelegungen μ gilt $\mu(\varphi) = W$ gdw $\mu(\psi) = W$.

Gibt es Strukturmerkmale "$0, 1, \sqcap, \sqcup, ^c$", so dass $(L(M)/\equiv, 0, 1, \sqcap, \sqcup, ^c)$ eine Boole'sche Algebra ist?

Aufgabe 2.

i) Gilt $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\psi \vee \varphi)$?

ii) Gilt $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$?

iii) Folgt aus $\vdash \exists y\forall x\neg\varphi(x, y)$ die Beweisbarkeitsaussage $\vdash \forall x\exists y\neg\varphi(x, y)$?

iv) Gilt $\vdash (\exists x\psi \wedge \exists x\varphi) \rightarrow \exists x(\psi \wedge \varphi)$?
Hinweis: Benutzen Sie die Regeln des Hilbertkalküls und den Korrektheitssatz.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{B} = (B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, ^c)$ eine Boole'sche Algebra und F_0 ein filter auf B. Zeigen Sie, dass es einen Ultrafilter $U \supseteq F_0$ gibt.
Hinweis: Man kann mit dem Lemma von Zorn, angewendet auf $\mathcal{H} = (\{F : F \text{ Filter und } F \supseteq F_0\}, \subseteq)$*, arbeiten. Zeigen Sie hierzu, dass* $\mathcal{H}$ *eine induktive Halbordnung ist.*

Aufgabe 4. Seien immer noch $\mathfrak{B}$ und F_0 wie in 3).

i) Zeigen Sie: Es gibt zwei verschiedene Ultrafilter $U_1, U_2 \supseteq F_0$ gdw F_0 kein Ultrafilter ist.

ii) Wann ist der Schnitt zweier Filter auf B wieder ein Filter?

iii) Ist die Vereinigung zweier Filter wieder ein Filter?

***

Für alle Aufgaben, nicht nur auf diesem Blatt, gilt: *Begründen Sie Ihre Antworten.*

Abgabe bis Dienstag 24.05.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur