Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 5

(24.05.2016)

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass endliche elementar äquivalente Strukturen isomorph sind. *Hinweis: Das ist einfach für endliches L. Für unendliches L nehmen wir an, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht isomorph sind. Dann gibt es für jede Bijektion $F : A \to B$ ein Zeichen Z_F aus L, das mit F nicht kommutiert. Betrachte nun die endliche Teilsprache $L' = \{Z_f | f : A \to B$ Bijektion $\}$*

Aufgabe 2. Wir schreiben für die Aussagenlogik $\varphi \models \psi$, wenn für alle Wahrheitsbelegungen μ gilt: Wenn $\mu(\varphi) = W$, so $\mu(\psi) = W$. Für Satzmengen sei $\Phi \models \psi$ entsprechend definiert: Für alle μ, wenn μ alle $\varphi \in \Phi$ wahr macht, so $\mu(\psi) = W$.

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache erster Stufe oder eine Menge aussagenlogischer Formeln. $\Phi \subseteq \mathcal{L}$ heißt unabhängig, wenn für alle paarweise verschiedenen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ nicht $\varphi_1 \models \varphi_2$. Ξ heißt Axiomatisierung von Φ, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt: $\Xi \models \varphi$ gdw $\Phi \models \varphi$.

(a) Hat jede Formelmenge eine unabhängige Axiomatisierung?

(b) Hat jede Formelmenge eine unabhängige Axiomatisierung, die Teilmenge von ihr ist?

Aufgabe 3. $M \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt *Spektrum*, wenn es eine Sprache L und eine L-Formel φ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$:

$$n \in M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \varphi \text{ besitzt ein Modell mit} \\ \text{einer } n\text{-elementiger Grundmenge.} \end{array}$$

Man zeige:

1. Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist ein Spektrum.
2. Die Menge der geraden Zahlen aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist ein Spektrum.

Wer mag, kann sich überlegen, ob die Mengen der

- Quadratzahlen,
- Primzahlpotenzen,
- Zweierpotenzen

Spektren sind.

3. Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, die kein Spektrum ist?

4*. Ist für ein Spektrum M stets auch $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \setminus M$ ein Spektrum?

Abgabe bis Dienstag 31.05.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

Aufgabe 4. Eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen heißt *axiomatisierbar* (oder *elementar*), wenn es eine L-Theorie T gibt, so dass

$$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_L(T) = \{\mathfrak{A} \;\; L\text{-Struktur} \; : \; \mathfrak{A} \models T\}.$$

Es sei $L = \emptyset$.

(a) Ist die Klasse aller unendlichen L-Strukturen axiomatisierbar?

(b) Ist die Klasse aller endlichen L-Strukturen axiomatisierbar? (Hinweis: Kompaktheitssatz)

(c) Ist die Klasse aller unendlichen L-Strukturen endlich axiomatisierbar?

Abgabe bis Dienstag 31.05.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur