Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 6

(31.05.2016)

Aufgabe 1. Sei T^* wie im Beweis des Vollständigkeitssatzes. Zeigen Sie, dass sich das im Vollständigkeitssatz konstruierte Termmodell $\mathfrak{A}$ von T^* in jedes Modell von T^* elementar einbetten lässt. Dazu definieren wir: $\mathfrak{A} \hookrightarrow_e \mathfrak{B} := \exists f : A \to B$ sodass f.a. Formeln φ und f.a. $a_1, \ldots, a_n \in A$ $[\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]]$. Wir sagen zu $\mathfrak{A} \hookrightarrow_e \mathfrak{B}$ "*$\mathfrak{A}$ ist elementar in $\mathfrak{B}$ einbettbar*". Falls die Einbettung die Identität ist, schreibt man $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und sagt "$\mathfrak{A}$ ist eine *elementare Substruktur* von $\mathfrak{B}$".

Aufgabe 2. Eine Struktur $G = (V, E)$ heißt *Graph*, falls E eine irreflexive, symmetrische zweistellige Relation ist. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, eine Abbildung $c : V \to X$ heißt *Färbung* gdw

$$\forall x, y \in V (xEy \to c(x) \neq c(y)).$$

Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, G heißt *k-färbbar* gdw es eine Färbung $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ für G gibt.

i) Sei $G = (V, E)$ ein abzählbarer Graph und sei jede endliche Teilmenge von V mit der von G induzierten Relation (auch *Teilgraph* genannt) ein k-färbbarer Graph. Ist dann G k-färbbar?

ii) $G = (V, E)$ heißt endlich färbbar gdw G k-färbbar ist für ein geeignetes $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Sei jeder endliche Teilgraph von G endlich färbbar. Ist dann G endlich färbbar?

Aufgabe 3. Sei $P_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \to P_{<\omega}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Definieren Sie $mE_\beta n :\Leftrightarrow m \in \beta(n)$ und betrachten Sie die L_{Me}-Struktur $(\mathbb{N}, E_\beta)$.

i) Welche Axiome von ZFC (ohne Fundierung) gelten in $(\mathbb{N}, E_\beta)$?

ii) Für die Bijektion

$$\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}) = \{n_1, \cdots, n_k\} \text{ (paarweise verschiedene } n_i)$$

ist $(\mathbb{N}, E_\beta)$ *fundiert*: es gibt keine unendliche absteigende Kette $\ldots E_\beta n_3 E_\beta n_2 E_\beta n_1 E_\beta n_0$.

iii) Geben sie ein β an, für das $(\mathbb{N}, E_\beta)$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.

Aufgabe 4. Es sei $(\mathbb{N}, E_\beta)$ wie in der vorigen Aufgabe definiert.

i) Geben Sie ein β an, für das $(\mathbb{N}, E_\beta)$ nicht fundiert ist aber trotzdem das Fundierungsaxiom erfüllt. *(Hinweis: Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finden Sie eine geeignete Bijektion $\beta : \mathbb{Z} \to P_{<\omega}(\mathbb{Z})$ mit $m \in \beta(n) \Rightarrow m < n$).*

ii) (Freiwillig, für 4 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass alle fundierten $(\mathbb{N}, E_\beta)$ isomorph sind. (*Hinweis: Benutzen Sie Induktion über den E_β-Rang.*)

Abgabe bis Dienstag 07.06.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur