Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 7
(07.06.2016)

Aufgabe 1. Wir definieren x *ist eine Kopie einer natürlichen Zahl* gdw $(x, \in)$ linear geordnet ist und alle Elemente von x außer dem kleinsten einen Vorgänger haben und $(x, \in)$ ein Maximum hat.

i) Wieviele Kopien von $\bar{3}$ gibt es?

ii) Wieviele Kopien von $\bar{0}$ gibt es?

iii) Ist jede Kopie einer natürlichen Zahl $\in$-isomorph zu einer von Neumann'schen natürlichen Zahl?

Aufgabe 2. Zeigen Sie in ZFC, dass $(\omega, +, \cdot)$ ein unitärer kommutativer Halbring ist. Das heißt, dass die Körperaxiome Nr. 1,2,4,5,6,7,8 der Seite 5 (Zieglers "Mathematische Logik") gelten.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{M}$ ein Modell von ZFC. Ein Element a von $\mathcal{M}$ heißt *nichtstandard natürliche Zahl*, wenn $\mathcal{M} \models a \in \omega$, aber $\mathcal{M} \models \neg a \doteq \bar{n}$ für alle $n = 0, 1, \ldots$. Zeigen Sie:

i) Wenn ZFC konsistent ist, gibt es ein Modell mit nichtstandard natürlichen Zahlen.

ii) Es gibt in $\mathcal{M}$ keine kleinste nichtstandard natürliche Zahl.

Aufgabe 4. Das Induktionsschema für ω sagt: für jede L_{Me}-Formel $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ und jedes $(n_1, \ldots, n_k)$ gilt $(\varphi(\emptyset, n_1, \ldots, n_k) \wedge \forall x \in \omega(\varphi(x, n_1, \ldots, n_k) \to \varphi(x+1, n_1, \ldots, n_k))) \to \forall x \in \omega\, \varphi(x, n_1, \ldots, n_k)$.
Das Induktionssatz für ω sagt: $\forall y \subseteq \omega[(\emptyset \in y \wedge \forall x \in \omega(x \in y \to x+1 \in y)) \to y = \omega]$.

i) Folgt das Induktionsschema aus dem Induktionssatz?

ii) ~~Folgt der Induktionssatz aus dem Induktionsschema? (Hinweis: Aufgabe 3).~~

Abgabe bis Dienstag 14.06.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur