Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 9
(21.06.2016)

Aufgabe 1. Für $\alpha \in \mathrm{On}$, sei V_α die α-te Stufe der von Neumann-Hierarchie. Zeigen Sie: Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ mit $\alpha < \beta$ gilt:

i) V_α ist transitiv;

ii) $V_\alpha \in V_\beta$;

iii) $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

Aufgabe 2. Welche Axiome von ZFC erfüllt $(V_\omega, \in)$?

Aufgabe 3. Für eine Menge A von Ordinalzahlen sei $\sup_{\alpha \in A} \alpha$ das Supremum von A, also die kleinste obere Schranke von A in On. Wir definieren auf Addition, Multiplikation und Exponentiation von Ordinalzahlen durch folgende Rekursionsvorschriften: (λ ist immer eine Limeszahl).

$$\begin{array}{lll} \alpha + 0 = \alpha & \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 & \alpha + \lambda = \sup_{\beta < \lambda}(\alpha + \beta) \\ \alpha \cdot 0 = 0 & \alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha & \alpha \cdot \lambda = \sup_{\beta < \lambda}(\alpha \cdot \beta) \\ \alpha^0 = 1 & \alpha^{\beta + 1} = \alpha^\beta \cdot \alpha & \alpha^\lambda = \sup_{\beta < \lambda} \alpha^\beta \end{array}$$

i) Ist $\omega < 2^{2^\omega}$?

ii) Ist $+$ kommutativ?

Aufgabe 4. Zeigen Sie den Satz über die *Cantor'sche Normalform*: Jede Ordinalzahl läßt sich auf eindeutige Weise schreiben als

$$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$$

für natürliche Zahlen $n_i > 0$ und Ordinalzahlen $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$. (Die Exponentiation ist hier die ordinale Exponentiation.)

Abgabe bis Dienstag 28.06.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur