

BLATT 10
(28.06.2016)

Aufgabe 1. Seien $\alpha, \beta > 0$ Ordinalzahlen und X, Y nicht leere Mengen.

- i) (ZF) Sei $f : \alpha \rightarrow \beta$ injektiv. Gibt es dann eine Surjektion $g : \beta \rightarrow \alpha$?
- ii) (ZF) Sei $g : \beta \rightarrow \alpha$ surjektiv. Gibt es dann $f : \alpha \rightarrow \beta$ injektiv?
- iii) (ZF) Sei $f : X \rightarrow Y$ injektiv. Gibt es dann $g : Y \rightarrow X$ surjektiv?
- iv) (ZFC) Sei $g : Y \rightarrow X$ surjektiv. Gibt es ein $f : X \rightarrow Y$ injektiv?
- v) (ZF) Nun sei (Y, R) eine Wohlordnung und $g : Y \rightarrow X$ eine Surjektion. Finden sie eine Injektion $f : X \rightarrow Y$ ohne Benutzung des Auswahlaxioms.

Aufgabe 2 (Hartogs-Nachfolger). Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl $\alpha \geq \omega$

$$\beta := \sup\{\gamma : \text{es existiert eine Bijektion } f : \alpha \rightarrow \gamma\}$$

eine Kardinalzahl ist.

Ist $\beta = |\alpha|^+$?

Aufgabe 3. Arbeiten Sie in ZF:

- i) Sei $f : X \rightarrow Y$ injektiv. Finden Sie eine Injektion $i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$.
- ii) Gibt es eine Injektion von $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
- iii) Gilt $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$? (Versuchen Sie mit Injektionen in beide Richtungen. Sie dürfen den Satz von Cantor, Schröder und Bernstein ($a \preceq b \wedge b \preceq a \rightarrow a \sim b$) ohne Beweis benutzen.)

Aufgabe 4. Gibt es ein $\alpha > 0$ so, dass $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$? (Hinweis: Suchen Sie zwei sich abwechselnde Folgen im Bild der \aleph -Operation und im Bild der \beth -Operation.)