Mathematische Logik
SS 2016
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 11
(05.07.2016)

Aufgabe 1. Sei $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, und sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ der Dimension $\aleph_3$. Welche Mächtigkeit hat V?

Aufgabe 2. Sei φ eine beliebige L_{Me}-Aussage. Zeigen Sie:

i)
- $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow Bew(\ulcorner\varphi\urcorner)$ gdw $ZFC \vdash \varphi$;
- $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$ gdw $ZFC \vdash \neg\varphi$.

ii) $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow Bew(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$ gdw $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \neg CON_{ZFC}$.

Aufgabe 3. Die *Ackermannfunktion* $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $A(x, 0) = 2 + x$, $A(0, 1) = 0$, $A(0, y) = 1$ für $y > 1$ und $A(x + 1, y + 1) = A(A(x, y + 1), y)$.

i) Bestimmen Sie die Funktionen $A_n(x) := A(x, n)$ für $n = 0, 1, 2, 3$.

ii) Zeigen Sie, dass jedes A_n primitiv rekursiv ist. Begründen Sie, warum A in einem intuitiven Sinn berechenbar ist.

iii) (Freiwillig) Ist A rekursiv?

Aufgabe 4. Sei A wie in Aufgabe 3.

i) Für jede primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt es ein n mit $f(x_1, \ldots, x_k) \leq A(\sum_{1 \leq i \leq k} x_i, n)$ für alle $(x_1, \ldots, x_k) \neq (0, \ldots, 0)$. (Hinweis: über den Aufbau primitiv rekursiver Funktionen.)

ii) Zeigen Sie, dass die Ackermannfunktion nicht primitiv rekursiv ist. (Hinweis: man konstruiere aus A eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die i) nicht gilt.)

Abgabe bis Dienstag 12.07.2016, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur