BLATT 0 [Anwesenheitsaufgaben]

Aufgabe 1.

Eine Menge oder ein Klasse A heißt *transitiv*, wenn $x \subseteq A$ für alle $x \in A$ (wenn also aus $x \in A$ und $y \in x$ sich $y \in A$ ergibt). Man zeige:

1. $\emptyset$ ist transitiv.
2. Ist x transitiv und $y \subseteq x$, so ist $x \cup \{y\}$ transitiv. Insbesondere ist $x \cup \{x\}$ transitiv.
3. Sind x und y transitiv, so auch $x \cap y$ und $x \cup y$; allgemeiner: Ist A eine nicht leere Menge transitiver Mengen, so sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv.

Aufgabe 2.

1. Zeigen Sie: $\{x\}$ ist transitiv gdw $x = \emptyset$.
2. Für welche x, y ist $\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}$ transitiv? Warum?

Aufgabe 3. Die *kumulative Hierachie* ist durch transfinite Rekursion definiert:

$$
\begin{aligned}
V_0 &:= \emptyset \\
V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha) \\
V_\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \\
\mathrm{WF} &:= \bigcup \{V_\alpha \ : \ \alpha \in \mathrm{On}\}.
\end{aligned}
$$

Eine Menge $x \in \mathrm{WF}$ hat *Rang* α wenn $x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$. Wir schreiben $\mathrm{rk}(x) = \alpha$, wenn x Rang α hat.

1. Man zeige: für alle $y \in \mathrm{WF}$, $\mathrm{rk}(y) = \sup\{\mathrm{rk}(x) + 1 : x \in y\}$;
2. Berechnen Sie $\mathrm{rk}(\mathcal{P}(x))$,
3. berechnen Sie $\mathrm{rk}(\{x\})$,
4. berechnen Sie $\mathrm{rk}(x \times y)$,
5. berechnen Sie $\mathrm{rk}(\cup x)$, jeweils in Abhängigkeit von $\mathrm{rk}(x)$ und $\mathrm{rk}(y)$.

Aufgabe 4. Gibt es eine Menge x, so dass $V \setminus x$ eine Menge ist? Warum?
Gibt es eine echte Klasse K, so dass $\bigcup K$ eine Menge ist? Warum?