Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 1

25.04.2017

Aufgabe 1. Gegeben ist die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen von natürlichen Zahlen mit der Ordnung $\leq^*$:

$$\forall f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}[f \leq^* g \Leftrightarrow \exists n \forall m \geq n f(m) \leq g(m)]$$

1. Ist $\leq^*$ reflexiv?
2. Ist $\leq^*$ transitiv?
3. Ist $\leq^*$ antisymmetrisch?
4. Erfüllt $\leq^*$ die Trichotomie?

Begründen Sie Ihre Antwort oder finden Sie konkrete Gegenbeispiele.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\leq^*$-beschränkt ist.
Hinweis: Sei $\{f_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Finden sie ein $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, so dass $f_n \leq^* g$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Seien $\langle A, R\rangle$ und $\langle B, S\rangle$ zwei Wohlordungen. Wir definieren die *Produktrelation* $<_P$ und die *lexikographische Relation* $<_L$ auf $A \times B$:

$$(a, b) <_P (c, d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$$
$$(a, b) <_L (c, d) \Leftrightarrow aRc \vee (a = c \wedge bSd)$$

1. Zeigen Sie, dass $<_P$ und $<_L$ Halbordnungen sind.
2. Ist $<_P$ eine lineare Ordnung?
3. Ist $<_P$ fundiert?
4. Ist $<_L$ eine Wohlordnung? Falls Sie bejahen, bestimmen Sie den Ordnungstyp.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.
1. Welche Wohlordnungen lassen sich in die lineare Ordnung $(\mathbb{Q}, <)$ einbetten?
2. Welche Wohlordnungen lassen sich in die lineare Ordnung $(\mathbb{R}, <)$ einbetten?

Abgabe bis Dienstag 02.05.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur