Mengenlehre: Unabhängigkeitsbeweise
SS 2017
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 2
02.05.2017

Aufgabe 1. Eine Ordinalzahl α ist eine *Limeszahl*, wenn $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \beta+1$ für alle Ordinalzahlen β.

a) Ist α eine Limeszahl genau dann, wenn ($\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha = \bigcup \alpha$)?

b) Nun sei α eine Limeszahl. Ist dann $\alpha = \bigcup\{\beta + 1 : \beta \in \alpha\}$?

Beweisen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2. Wir definieren eine Operation $\beth : \mathrm{On} \to V$ rekursiv über $\alpha \in \mathrm{On}$ (Die sogenannte *Beth-Operation*):

$$\begin{aligned} \beth_0 &:= \omega \\ \beth_{\alpha+1} &:= 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda &:= \bigcup_{\delta<\lambda} \beth_\delta. \end{aligned}$$

a) Ist die Beth-Operation wohldefiniert?

b) Welche Axiome ziehen Sie neben dem Rekursionssatz zur Begründung der Wohldefiniertheit heran?

Aufgabe 3. Sei X eine nicht leere Menge. Wir definieren folgende Verwandte des Auswahlaxioms:

- $\mathrm{AC}_\omega(X)$ (*Abzählbares Auswahlaxiom auf X*): Jede abzählbare Menge $\{P_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ besitzt eine Auswahlfunktion f (i.e. $\forall n \in \omega(f(n) \in P_n)$).
- $\mathrm{DC}(X)$ (*Beschränktes Auswahlaxiom auf X*): Für jede Relation $R \subseteq X \times X$ mit $\forall x \in X \exists y \in X((x,y) \in R)$ gibt es eine Folge $\langle x_n : n \in \omega\rangle$, so dass $\forall n \in \omega((x_n, x_{n+1}) \in R)$.
- AC_ω (*Abzählbares Auswahlaxiom, Axiom of countable Choice*): Für alle Mengen X gilt $\mathrm{AC}_\omega(X)$.
- DC (*Beschränktes Auswahlaxiom, axiom of Dependent Choice*): Für alle Mengen X gilt $\mathrm{DC}(X)$.

Wir betrachten die folgenden möglichen Implikationen:
$\mathrm{AC}_\omega \to \mathrm{AC}$
$\mathrm{AC}_\omega \to \mathrm{DC}$
$\mathrm{AC} \to \mathrm{DC}$
$\mathrm{AC} \to \mathrm{AC}_\omega$
$\mathrm{DC} \to \mathrm{AC}_\omega$
$\mathrm{DC} \to \mathrm{AC}$
Finden Sie die drei unter diesen, die aus ZF folgen, und beweisen Sie diese. Die technischen Mittel zum Nachweis einer Nicht-Implikation werden wir in der Vorlesung kennen lernen.

Aufgabe 4. Wir setzen ZF ohne das Fundierungsaxiom voraus, und definieren V_α wie im Blatt 0.

a) Ist diese Definition auch ohne das Fundierungsaxiom gerechtfertigt? Denken Sie über den Beweis des Rekursionssatzes nach.

b) Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Hat jedes $x \in V_\alpha$ ein $\in$-minimales Element? Arbeiten Sie induktiv über α. Zum Auffinden eines Minimums kann es günstig sein, ein Element zu raten.

Abgabe bis Dienstag 09.05.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur