Mengenlehre: Unabhängigkeitsbeweise | Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
SS 2017 | Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz
Übungen

BLATT 3
09.05.2017

Aufgabe 1. a) Zeigen Sie in ZFC: Falls es ein $f\colon X \underset{auf}{\longrightarrow} Y$ gibt, so gibt es ein $g\colon Y \underset{inj}{\longrightarrow} X$.

b) Zeigen Sie in ZF: Falls es ein $f\colon X \underset{inj}{\longrightarrow} Y$ gibt, so gibt es ein $g\colon Y \underset{auf}{\longrightarrow} X$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie in ZF: Falls $f\colon \beta \to \alpha$ surjektiv ist und $\beta < \alpha$, dann gibt es eine Bijektion $g\colon \beta \to \alpha$. Folgern Sie hieraus: $\min\{\beta : \exists s\colon \beta \underset{bij.}{\longrightarrow} \alpha\} = \min\{\beta : \exists s\colon \beta \underset{auf}{\longrightarrow} \alpha\}$. Die erste Zahl heißt die Mächtigkeit von α und wird $|\alpha|$ geschrieben.

Aufgabe 3. Eine Menge A heißt *Dedekind-unendlich,* gdw eine Bijektion von A auf eine echte Teilmenge von A gibt.
Eine Menge A heißt *endlich*, gdw es eine natürliche Zahl n und eine Funktion g gibt, so dass $g\colon n \underset{bij}{\longrightarrow} A$.
Eine Menge heißt *unendlich*, gdw sie nicht endlich ist. Sie könnte auch keine Mächtigkeit haben.

Arbeiten Sie in ZFC.

a) Ist jede Dedekind-unendliche Menge unendlich?

b) Ist jede unendliche Menge Dedekind-unendlich?

Wo benutzen Sie das Auswahlaxiom?

Aufgabe 4 (Das Primidealtheorem)**.** Wir arbeiten in ZFC. Sei A eine nicht leere Menge. $I \subseteq \mathcal{P}(A)$ heißt *Ideal*, falls:

- $\emptyset \in I$,
- $A \notin I$,
- $\forall a, b \in I,\ a \cup b \in I$,
- $\forall a \in I \forall b \subseteq a,\ b \in I$.

Ein Ideal I heißt *Primideal*, falls $\forall J \supsetneq I,\ A \in J$. Zeigen Sie:

a) (3 Punkte) Jedes Ideal lässt sich zu einem Primideal erweitern.

b) (1 Punkt) J ist Primideal $\iff$ (J ist ein Ideal und $\forall a \subseteq A,\ a \in J \vee (A \setminus a) \in J$).

Bemerkung: Das Auswahlaxiom folgt nicht aus ZF zusammen mit dem Primidealtheorem.

Abgabe bis Dienstag 16.05.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstrasse 1, 3. OG, Logik-Flur