Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 4

16.05.2017

Die Zeichen $\cdot$ und $+$ stehen für die ordinale Addition und die ordinale Multiplikation.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass (a) und (b) äquivalent sind, d. h. für alle $(\alpha, \beta \in \mathrm{On}) \exp_{ord}(\alpha, \beta) = \exp_i(\alpha, \beta)$.

(a) $\exp_{ord}(\alpha, \beta) := \mathrm{otp}(\{f \in \mathcal{P}(\beta \times \alpha) : f : \beta \to \alpha, f(\gamma) = 0$ für alle bis auf endlich viele $\gamma\}, R)$ mit der Relation

$$fRg \leftrightarrow \exists \gamma < \beta (f \restriction [\gamma + 1, \beta) = g \restriction [\gamma + 1, \beta) \wedge f(\gamma) < g(\gamma))$$

(b) Für jedes α definieren wir induktiv über On:

$$\begin{aligned}
&\exp_i(\alpha, 0) = 1, \\
&\exp_i(\alpha, S(\beta)) = \exp_i(\alpha, \beta) \cdot \alpha, \\
&\exp_i(\alpha, \lambda) = \sup\{\exp_i(\alpha, \beta) \colon \beta \in \lambda\}, \text{ für } \lim(\lambda).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. a) Seien $1 \leq r \leq s < \omega$. Für welche $\gamma \in \mathrm{On}$ ist $\gamma + s \cdot \omega = r \cdot \omega$?

b) Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Für welche $\gamma \in \mathrm{On}$ is $\gamma + \kappa = \kappa$?

Aufgabe 3. Sei $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ monoton wachsend, d.h. $\forall \alpha < \beta\ F(\alpha) < F(\beta)$. Sei F zusätzlich stetig, d.h. $\forall \lambda \in \mathrm{On}(\lim(\lambda) \Rightarrow f(\lambda) = \bigcup\{f(\alpha) : \alpha < \lambda\})$.

a) Sei $\gamma \in \mathrm{On}$. Gibt es ein $\delta \geq \gamma$, s.d. $F(\delta) = \delta$?

b) Sei $C := \{\delta \in \mathrm{On} : F(\delta) = \delta\}$. Ist C abgeschlossen in der Ordnungstopologie von $(\mathrm{On}, \in)$? *Sei $(L, <_L)$ eine lineare Ordnung. Die Ordnungstopologie auf L hat die Basis $\{\{x \in L : l_1 <_L x <_L l_2\} : l_1 <_L l_2 \in L\}$.*

c) Nennen Sie drei Beispiele für stetige Operationen aus der Vorlesung. Sind die Operationen auch monoton wachsend?

d) Nennen Sie eine Ordinalzahl α, so dass $\beta \mapsto \beta + \alpha$ nicht an allen Stellen β stetig ist.

Aufgabe 4 (I.9.48 Kunen)**.** The requirements for a Master degree in math at $\aleph U$ are only the courses $[\sigma]$ for each $\sigma \in \omega^{<\omega}$. The prerequisites for $[\sigma]$ are all $[\tau]$ such that τ is obtained from σ by replacing one term n from τ by a finite (possibly empty) sequence of numbers less than n. For example, $[2, 1, 7, 1]$ teaches you all about the sequence $(2, 1, 7, 1)$, and has as prerequisites $[1, 7, 1], [0, 1, 1, 0, 1, 7, 1], [2, 1, 5, 5, 4, 0, 1, 1]$, etc. $[\,]$ teaches you all about the empty sequence $\emptyset$, and has no prerequisites. No number is less than 0, so the only prerequisite for $[0]$ is $[\,]$.

a) Prove that the prerequisite relation is well-founded; so you can graduate in some ordinal number of semesters.

b) Compute the rank function; remark that here $\mathrm{rank}(x)$ is the first semester in which you can possibly take course x.

Abgabe bis Dienstag 23.05.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur