Mengenlehre: Unabhängigkeitsbeweise
SS 2017
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 5
23.05.2017

Aufgabe 1. Zwei Cauchyfolgen $\langle c_n : n \in \omega\rangle$ und $\langle d_n : n \in \omega\rangle$ heißen äquivalent, und wir schreiben $\langle c_n : n \in \omega\rangle \sim \langle d_n : n \in \omega\rangle$, gdw $|c_n - d_n|$ eine Nullfolge ist. Wir nehmen als Inkarnation von $\mathbb{R}$ die Menge der Cauchyfolgen mit rationalen Folgengliedern modulo $\sim$. Außerdem sei $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie versehen.
Im folgenden dürfen Sie Tatsachen über $\mathbb{R}$ aus der Anfängervorlesungen ohne Beweis nutzen.

a) Ist $|\mathbb{R}| = |\{O \subseteq \mathbb{R} : O \text{ offen}\}|$?

b) Zeigen Sie: Die Mengen $\{f : f : \omega \to 2\}$, $\mathcal{P}(\omega)$, $\{f : f : \omega \xrightarrow[bij]{} \omega\}$, und $\{f : f : \mathbb{R} \xrightarrow[stetig]{} \mathbb{R}\}$ sind gleichmächtig.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{O}$ die übliche Topologie auf den reellen Zahlen. Wieviele Borelmengen gibt es im topologischen Raum $([0,1]_{\mathbb{R}}, \mathcal{O})$? Denken Sie an eine Aufzählung in ω_1 Schritten.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Wir definieren $mE_\beta n \Leftrightarrow m \in \beta(n)$ und betrachten die $\mathcal{L}(\{\in\})$-Struktur $(\mathbb{N}, E_\beta)$.

a) Welche Axiome von ZFC gelten in $(\mathbb{N}, E_\beta)$?

b) Für die Bijektion

$$\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}) = \{n_1, \ldots, n_k\} \text{ (für paarwise verschiedene } n_i)$$

ist $(\mathbb{N}, E_\beta)$ *fundiert*: es gibt keine unendliche absteigende Kette

$$\ldots n_{-3} E_\beta n_{-2} E_\beta n_{-1} E_\beta n_0$$

Aufgabe 4. c) Geben sie ein β an, für das $(\mathbb{N}, E_\beta)$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.

d) Geben Sie ein β an, für das $(\mathbb{N}, E_\beta)$ nicht fundiert ist, aber trotzdem das Fundierungsaxiom erfüllt.
Hinweis: Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finden Sie eine geeignete Bijektion $\beta\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{Z})$ mit $m \in \beta(n) \Rightarrow m < n$.

BONUS (2 Punkte). Zeigen Sie, dass alle fundierten $(\mathbb{N}, E_\beta)$ isomorph sind.

Abgabe bis Dienstag 30.05.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur