Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 6

30.05.2017

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

a) Sei κ unendlich und regulär. Dann gilt: $(V_\kappa, \in) \models$ Ersetzungsschema;

b) Sei κ eine starke Limeskardinalzahl. Dann gilt: $(V_\kappa, \in) \models$ Potenzmengenaxiom;

c) Wenn $\alpha > \omega$, dann $(V_\alpha, \in) \models$ Unendlichkeitsaxiom;

d) Wenn $\kappa > \omega$ und stark unerreichbar, dann $(V_\kappa, \in) \models \mathsf{ZFC}$.

Aufgabe 2. Wir betrachten ω_1 mit der Ordnungstopologie. Sei $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\exists \alpha < \omega_1 \forall \beta > \alpha (f(\beta) = f(\alpha)).$$

Hinweis: Sei $L := \{\lambda < \omega_1 : \lambda \text{ Limes}\}$. Für $\epsilon > 0$ finden Sie eine Abbildung $g : L \to \omega_1$, so dass für alle $\alpha \in L$, $g(\alpha) < \alpha$ und so dass ein geeignetes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gibt, mit $f''[(g(\alpha), \alpha)] \subseteq I$. Dann verwenden Sie das Lemma von Fodor für g. Zum Schluss wiederholt man den Vorgang für eine fallende Folge $\langle \epsilon_n : n \in \omega \rangle$ und geeignete Intervalle I der Länge ϵ_n.

Aufgabe 3. Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. Seien $0 < \kappa_i$, für $i \in \lambda$, Kardinalzahlen. Wir definieren $\prod_{i<\lambda} \kappa_i := \{f : \lambda \to \bigcup_{i \in \lambda} \kappa_i : \forall i \in \lambda \; f(i) \in \kappa_i\}$. Seien nun für $i < j < \lambda (\kappa_i \leq \kappa_j)$.
Ist dann

$$|\prod_{i<\lambda} \kappa_i| = (\sup_{i<\lambda} \kappa_i)^\lambda?$$

Hier ist die kardinale Exponentiation gemeint.
Hinweis: Für die $\geq$-Ungleichung kann man $\prod_{i \in A} \kappa_i$ betrachten für $A \subseteq \lambda$, $|A| = \lambda$.

Aufgabe 4. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Sei $\mu := \min\{\lambda : \kappa^\lambda > \kappa\}$. (Hier ist die kardinale Exponentiation gemeint.)

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie μ unter GCH.

b) (3 Punkte) Nun arbeiten wir in ZFC ohne Zusatzannahmen. Ist μ regulär?

   Hinweis: Wenn μ eine unendliche Kardinalzahl ist, ist μ insbesondere eine Limesordinalzahl. Wenn A eine nicht leere Menge ist, dann ist jede Funktion $f\colon \mu \to A$ durch die Folge $\langle f \restriction \alpha : \alpha \in \mu \rangle$ bestimmt. Genügen auch weniger Anfangsabschnitte?

Abgabe bis Dienstag 06.06.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur