Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

BLATT 7

13.06.2017

Aufgabe 1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukturen. Sei $n \in \omega$. Wir definieren $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$ gdw für alle φ vom Quantorenrang $\leq n$ und $\bar{a} \in A$ gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}]$$

Wir schreiben $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ gdw $\forall n \in \omega\ \mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$.

Zeigen Sie:

a) Wenn $\mathcal{B} \prec_n \mathcal{C}$, $A \subseteq B$ und $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{C}$, dann ist $\mathcal{A} \prec_n \mathcal{B}$.

b) Wenn $\mathcal{A}_\alpha \prec_n \mathcal{A}_\beta$ für $\alpha < \beta < \lambda$ und $\mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{B}$ für alle $\alpha < \lambda$, dann ist

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{B}.$$

c) Wenn "$\in$" $\in \tau$ und alle Strukturen transitiv sind und die Interpretation $\in^{\mathcal{A}} = \in \cap (A \times A)$ ist, dann kann man in der Definition von $\prec_0$ auch die Δ_0-τ-Formeln zulassen.

Aufgabe 2. Seien $\kappa = \omega_1$ und $S \subseteq \{\alpha \in \omega_1 \,:\, \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ stationär. Gibt es überhaupt so ein S?

Mit AC nehmen wir zu jedem $\alpha \in S$ eine aufsteigende Folge $f_\alpha \colon \omega \to \alpha$, die die folgenden Eigenschaften hat: $f_\alpha(m) < f_\alpha(n)$ für $m < n \in \omega$ und
$\bigcup_{n\in\omega} f_\alpha(n) = \alpha$.

Zeigen Sie, dass ein $n \in \omega$ existiert, so dass für jedes $\eta \in \omega_1$

$$\{\alpha \in S : f_\alpha(n) \geq \eta\} \text{ stationär in } \omega_1 \text{ ist.}$$

Aufgabe 3. Sei $n \in \omega$ so, dass für alle $\eta \in \omega_1$ $S' := \{\alpha \in S \,:\, f_\alpha(n) \geq \eta\}$ stationär ist. Wenden Sie den Satz von Fodor auf $\alpha \mapsto f_\alpha(n)$ für $\alpha \in S'$ an und erhalten Sie ein $\beta_0 \geq \eta$ und ein $S_{\beta_0} \subseteq S'$, so dass für alle $\alpha \in S_{\beta_0}$ gilt $f_\alpha(n) = \beta_0$.

Können Sie den Satz von Fodor auf eine geeignete andere Einschränkung von $\alpha \mapsto f_\alpha(n)$ anwenden, so dass er eine stationäre Menge liefert, die disjunkt zu S_{β_0} ist?

Aufgabe 4. Können Sie das eben angefangene Verfahren iterieren, um ω_1 disjunkte stationäre Teilmengen von S zu erhalten?

BONUS (2 Punkte). Benutzen Sie bei der Iteration des Verfahrens noch einmal das Auswahlaxiom?

Abgabe bis Dienstag 20.06.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur