

BLATT 8
20.06.2017

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $n \geq 1$. Sei $A \subset V$ eine Δ_n -Menge, d.h. es gibt eine Δ_n -Formel φ so, dass $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)$. Sei $F: A \times V \rightarrow V$ eine Σ_n -Operation, d.h. es gibt eine Σ_n -Formel ψ , so dass

$$F(x, y) = z \Leftrightarrow \psi(x, y, z).$$

Zeigen Sie, dass $F(x, y) = z$ eine Δ_n -Operation ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\neg(F(x, y) = z)$ eine Σ_n -Definition hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $A \subseteq V$ eine Klasse. Sei R eine fundierte mengenähnliche Relation auf $A \subseteq V$. Wir definieren xR^*y durch

$$\exists n \in \omega \exists x_0 \dots \exists x_{n-1} xRx_0 \wedge \bigwedge_{i \leq n-2} x_iRx_{i+1} \wedge x_{n-1}Ry.$$

Untersuchen Sie R^* auf folgende Eigenschaften hin:

- Irreflexivität,
- Transitivität,
- Fundiertheit,
- Mengenähnlichkeit.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $n \geq 1$. Sei $A \subseteq V$ eine Δ_n -Klasse. Sei $F: A \times V \rightarrow V$ eine Σ_n -Operation. Sei $R \subseteq A \times A$ eine fundierte mengenähnlich Relation, so dass

$$y = \{u : uR^*x\}$$

eine Δ_n -definierbare Eigenschaft von (x, y) ist. Hier ist R^* wie in der Aufgabe 2 aus R gebildet. Sei G wie im Rekursionssatz gebildet: $G(x) = F(x, G \upharpoonright \text{pred}(x, A, R))$.

- (a) Bestimmen Sie die Komplexität von $G(x) = y$ in der Lévy-Hierarchie.

Hinweis: Man kann $G(x) = y$ wie folgt ausdrücken: Es gibt eine funktionswertige Funktion

$$\langle g_u : \text{pred}(u, A, R^*) \cup \{u\} \rightarrow V : uR^*x \vee u = x \rangle$$

so, dass

$$\begin{aligned} & (\forall u \in \text{pred}(x, A, R^*) \cup \{x\}) (\forall z \in \text{dom}(g_u)) (g_u(z) = F(z, g_u \upharpoonright \text{pred}(z, A, R))) \wedge \\ & (\forall v \in \text{pred}(x, A, R^*) \cup \{x\}) (\forall uR^*v) (g_u \subseteq g_v) \wedge g_x(x) = y. \end{aligned}$$

- (b) Kann man $G(x) = y$ auch mit einem \forall -Quantor und einer *wenn-dann* Formel ausdrücken?

Begründen Sie, dass die skizzierten Aussagen tatsächlich äquivalent zu Formeln in der Sprache $\mathcal{L}(\in)$ der von Ihnen bestimmten Stufe in der Lévy-Hierarchie sind. Begründen Sie, dass aus beiden Formeln zusammen die Operationalität von G folgt.

Bitte umblättern.

Abgabe bis Dienstag 27.06.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur

(c) Könnte man auch die Rekursionsgleichung $G(x) = F(x, G \upharpoonright \text{pred}(x, A, R^*))$ zulassen?

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $n \geq 1$, und sei A eine Δ_n -Klasse. Sei $R \subseteq A \times A$ eine mengenähnliche Relation, so dass

$$y = \{u : uRx\}$$

eine Δ_n -definierbare Eigenschaft von (x, y) ist. Sei R^* aus R wie in Aufgabe 2 gebildet. Ist dann auch

$$y = \{u : uR^*x\}$$

Δ_n -definierbar?