Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz

# BLATT 9

27.06.2017

**Aufgabe 1.** Sei $P$ eine Forcinghalbordnung, sei $p \in P$ so, dass es ein mit $p$ inkompatibles Element gibt. Zeigen Sie, dass

$$\{\tau \in M : p \Vdash \tau = \check{0}\}$$

eine echte Klasse in $M$ ist.

**Aufgabe 2.** Sei $M$ ein abzählbares transitives Modell eines gen"ugend großen Fragments von $\mathsf{ZFC}$, und sei $(P, <_P) \in M$ eine atomlose Forcinghalbordnung. Bestimmen Sie die Mächtigkeit von

$$\{G \subseteq P \;:\; G \text{ ist } P\text{-generisch über } M\}.$$

**Aufgabe 3.** Eine Menge $G \subseteq P$ heißt *schwacher Filter*, falls gilt:

a) $G \neq \emptyset$,

b) $\forall p \in P \forall q \in G (q \leq p \to p \in G)$,

c) $\forall p, q \in G \exists r \in P (r \leq p \land r \leq q)$.

Ein schwacher Filter $G$ heißt *$P$-generisch über $M$*, wenn $G$ jedes $D \in M$, das eine dichte Teilmenge von $P$ ist, schneidet.
Zeigen Sie: Wenn $G$ ein $P$-generischer schwacher Filter über $M$ ist, dann ist $G$ ein $P$-generischer Filter über $M$.

**Aufgabe 4.** Eine Menge $A \subseteq P$ heißt *Antikette*, wenn je zwei Elemente von $A$ unverträglich sind. Eine Antikette heißt *maximal*, wenn jede echte Erweiterung von $A$ um weitere Elemente von $P$ keine Antikette mehr ist.

Sei $G$ ein Filter. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) $G \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in M$, das eine dichte Teilmenge von $P$ ist;

b) $G \cap A \neq \emptyset$ für jedes $A \in M$, das eine maximale Antikette von $P$ ist;

c) $G \cap E \neq \emptyset$ für jedes $E \in M$, das die folgende Eigenschaft hat: $(\forall p \in P)(\exists q \in E)(p \not\perp q)$. (Letzteres nennt man „E ist *prädicht* in $P$".)

Abgabe bis Dienstag 04.07.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur