Mengenlehre: Unabhängigkeitsbeweise Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
SS 2017 Assistentin: M. Sc. Fiorella Guichardaz
Übungen

BLATT 10

04.07.2017

Aufgabe 1. Sei $\tau \in M^P$ und sei

$$\pi := \Big\{ \langle \varrho, p \rangle \ : \ (\exists \langle \sigma, q \rangle \in \tau)(\exists r)\big(\langle \varrho, r \rangle \in \sigma \wedge p \leq r \wedge p \leq q)\Big)\Big\}$$

Sei G ein P-generischer Filter über M.

- Ist $\pi_G = \bigcup(\tau_G)$?
- Welche Eigenschaften von G benutzen Sie in Ihrem Beweis?

Aufgabe 2. Sei $\tau \in M^P$ mit $\mathrm{dom}(\tau) \subseteq \{\check{n} \ : \ n \in \omega\}$. Sei

$$\sigma := \{\langle \check{n}, p \rangle : \forall q \in P(\langle \check{n}, q \rangle \in \tau \to p \perp q)\}$$

Zeigen Sie, dass $\sigma_G = \omega \setminus \tau_G$.

Hinweis: $\{r \ : \ \exists p \geq r(\langle \check{n}, p \rangle \in \sigma \vee \langle \check{n}, p \rangle \in \tau)\}$ ist dicht.

Bemerkung: Um "$\forall \tau \in M^P((\omega \setminus \tau_G) \in M[G])$" zu zeigen, braucht man die Forcingrelation.

Aufgabe 3. Eine Forcinghalbordnung P heißt *separativ*, wenn

$$\forall p, q \in P(p \not\leq q \to \exists r \leq p(r \perp q)).$$

1. Gilt $p \leq q \Rightarrow p \Vdash \check{q} \in \Gamma$? Hier ist Γ ein Name für den generischen Filter.
2. Gilt (P separativ $\wedge\, p \Vdash \check{q} \in \Gamma) \Rightarrow p \leq q$?
3. Gilt die vorigen Implikation auch, wenn man die Voraussetzung über die Separativität weglässt? Als Test bieten sich negativen natürlichen Zahlen als Forcingordnung an.

Aufgabe 4. Sei P eine Forcinghalbordnung. Wir definieren

$$p \approx q := (\forall r \in P)(r \perp p \leftrightarrow r \perp q).$$
$$[p]_\approx \leq_\approx [q]_\approx := \forall r(r \perp q \to r \perp p).$$

Wir definieren eine Abbildung in den Quotienten durch

$$i \colon P \to P/\approx$$
$$p \mapsto [p]_\approx.$$

1. Ist $\leq_\approx$ wohldefiniert?
2. Ist $(P/\approx, \leq_\approx)$ separativ?
3. Untersuchen Sie i auf die folgenden Eigenschaften hin:
   - $p \leq q \Rightarrow i(p) \leq_\approx i(q)$,
   - $p \leq q \Leftrightarrow i(p) \leq_\approx i(q)$,
   - $p \perp q \Leftrightarrow i(p) \perp_\approx i(q)$,
   - Das Bild von P ist dicht in $P/\approx$.

Abgabe bis Dienstag 11.07.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur