BONUS BLATT

18.07.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \omega_1)$ und sei G $\mathbb{P}$-generisch über M und sei $S = \{\alpha \in \omega_1 : \bigcup G(\alpha) = 1\}$.

(a) Ist S stationär in ω_1 in $M[G]$?
Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{P}$ unter absteigenden $(\omega+1)$-Folgen abgeschlossen ist.

(b) Ist S club in ω_1 in $M[G]$?
Hinweis: Betrachten Sie $S_0 := \omega_1 \setminus S$.

Aufgabe 2. Sei

$$\mathbb{P} = \{B \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}} : B \text{ Borel}, \lambda(B) > 0\},$$

und $B \leq_{\mathbb{P}} A$ wenn $B \subseteq A$. Hier ist λ das Lebesguemaß.

(a) Ist $\mathbb{P}$ separativ?

(b) Wie sieht der separative Quotient von $\mathbb{P}$ aus?

Aufgabe 3. Wir bleiben bei $\mathbb{P}$ von der vorigen Aufgabe. Sei τ ein $M^{\mathbb{P}}$-Name, so dass

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \colon \omega \to \omega.$$

Gibt es ein $p \in \mathbb{P}$ und ein $f \in M$, $f \colon \omega \to \omega$, so dass

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} (\forall n \in \omega)\tau(n) \leq f(n)?$$

Hinweis: Zuerst zeigt man, dass $\mathbb{P}$ die c.c.c. hat. Danach bietet sich folgende Zwischenbehauptung an: Sei $\{a_n : n \in \omega\}$ eine maximale Antikette in $\mathbb{P}$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \omega$, so dass

$$\lambda(a_0 \cup \cdots \cup a_n) > 1 - \varepsilon.$$

Nun nehme man geeignete maximale Antiketten A_k, die den Wert von $\tau(k)$ forcen, und eine geeignete Folge ε_k und dann n_{ε_k}. Der Schnitt von abzählbar vielen Bedingungen von "recht großem Maß" ist wieder eine Bedingung. Wie kann man hier die Zwischenbehauptung einsetzen?

Aufgabe 4. Nun sei $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \omega, \omega)$ und τ sei ein Name für $\bigcup G$.

(a) Gilt dann

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \colon \omega \to \omega?$$

(b) Gibt es ein $p \in \mathbb{P}$ und ein $f \in M$, $f \colon \omega \to \omega$, so dass

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} (\forall n \in \omega)\tau(n) \leq f(n)?$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es so ein Paar (p, f) gäbe. Finden Sie dann in Abhängigkeit von (p, f) ein n und ein $q \leq p$, s.d. $q \Vdash \tau(n) > f(n)$.

Abgabe bis Dienstag 25.07.2017, 10:15 Uhr,
entweder in der Vorlesung oder im Postfach Eckerstraße 1, 3. OG, Logik-Flur