

Mathematische Logik

Sommersemester 2018

Anwesenheitsaufgaben, 17.04.2018

1.
 - Martin rennt gerne.
 - Alle Lehrerinnen und alle Lehrer sind schlau.
 - Jede Person, die gerne rennt, ist schlau.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie aus den Angaben folgt:

- (a) Martin ist Lehrer.
 - (b) Jede schlaue Person ist Lehrerin oder Lehrer.
 - (c) Alle Lehrerinnen und alle Lehrer rennen gerne.
 - (d) Martin ist schlau.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Das Land X hat $2 \cdot n$ Einwohner. Es gibt zwei Sorten: der eine Teil sagt immer die Wahrheit, der andere Teil lügt immer. Eine Forscherin besucht X und will herausfinden, wieviele Lügner in X wohnen. Sie stellt jedem Einwohner immer dieselbe Frage: „Wieviele Lügner gibt es in X ?“ Der erste, den sie fragt, antwortet: „Bei uns gibt es mindestens einen Lügner.“ Der zweite, den sie fragt, antwortet: „Bei uns gibt es mindestens zwei Lügner“, der m -te, den sie fragt (für $m \leq 2 \cdot n$), antwortet: „Bei uns gibt es mindestens m Lügner.“ Wieviele Lügner wohnen in X ?
 3. Die Einwohner des Planeten Z sind rot oder blau. Es gibt vier Sorten: in der nördlichen Hemisphäre sagen die blauen Einwohner immer die Wahrheit, die roten immer das Falsche. Im Gegensatz dazu lügen die blauen Südländer immer und sagen die roten Südländer immer die Wahrheit.
 - (a) A ist ein Nordländer und C kommt aus dem Süden. A sagt: „ C und ich haben die gleiche Farbe“. C sagt: „ A und ich haben verschiedene Farben“. Wer hat Recht? Welche Farben haben A und C ?
 - (b) Ein Logiker besucht Z und in der Nacht fragt er einen Einheimischen, ob er ein blauer Nordländer sei. Aus der Antwort kann der Logiker keine der beiden Eigenschaften des Befragten erschließen. Ein zweiter Logiker trifft denselben Einwohner und fragt ihn, ob er ein blauer Südländer sei, aber auch der zweite Logiker kann keine der Eigenschaften des Befragten erschließen. Endlich kommt ein Logiker aus Freiburg und fragt, ob der Einwohner ein roter Südländer sei. Leider kann der dritte Logiker auch nichts festlegen. Woher kommt und welche Farbe hat der Einwohner? (Die Logiker kennen immer nur die Antwort auf ihre Frage.)
 4. Wir betrachten die das folgende Modell \mathfrak{M} :

Das Universum bestehe aus einer Familie: Vater, Mutter und drei Töchter. Diese sitzen um einen runden Tisch, im Uhrzeigersinn (von oben betrachtet): Mutter, eine Tochter, Vater, die beiden anderen Töchter. m, d sind Konstantenzeichen und f_r, f_l einstellige Funktionszeichen. m^m sei die Mutter, d^m der Vater, f_r^m gebe die rechts, f_l^m die links von jemandem sitzende Person an. W^m

sei die einstellige Relation „ist weiblich“ und T^m die zweistellige Relation „ist Tochter von“. Die Belegung β habe auf allen Variablen v_i , $i \in \mathbb{N}$, als Wert die zwischen Vater und Mutter sitzende Tochter.

(a) Werten Sie die folgenden Terme unter β aus:

$$f_l(v_0)[\beta] \quad f_r(f_r(f_r(m)))[\beta]$$

(b) Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in die Prädikatenlogik:

- Es gibt jemanden, der links neben der Mutter und rechts neben dem Vater sitzt.
- Alle Personen außer dem Vater sind weiblich.
- Für jede Person gilt: wenn sie die Tochter von jemandem ist, dann ist sie weiblich.
- Wenn jemand Tochter einer Person ist, dann ist diese Person der Vater.