

## Mathematische Logik Sommersemester 2018

Blatt 9, 19.6.2018,

Abgabe am 26.6.2018 vor 10 Uhr

im Logik-Flur in der Ernst-Zermelo-Straße oder in der Vorlesung zu Beginn der Vorlesung

1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Zorn'schen Lemma folgt.

*Hinweis:* Sei  $x$  eine Menge nicht leerer Mengen. Betrachten Sie die Menge der partiellen Auswahlfunktionen und wählen Sie eine geeignete Halbordnung.

2. (4 Punkte) Sei  $X$  eine nicht leere Menge. Ein *Filter über  $X$*  ist eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  and  $X \in \mathcal{F}$
2.  $\forall Y \in \mathcal{F} \forall Z \subseteq X (Y \subseteq Z \rightarrow Z \in \mathcal{F})$
3.  $\forall Y_1, Y_2 \in \mathcal{F} (Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F})$ .

Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  über  $X$  ist ein  $\subseteq$ -maximaler Filter über  $X$ , d.h.  $\forall Y \subseteq X (Y \notin \mathcal{U} \rightarrow \exists Z \in \mathcal{U} (Z \cap Y = \emptyset))$ .

Kann jeder Filter über  $X$  zu einem Ultrafilter erweitert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis:* Man darf das Auswahlaxiom benutzen.

3. (4 Punkte)

- (a) Wir nehmen an, dass ZFC konsistent ist. Geben Sie eine konsistente Erweiterung an, die die Inkonsistenz von ZFC beweist.
- (b) Wir nehmen an, dass  $\text{ZFC} \cup \{\neg\text{CON}_{\text{ZFC}}\}$  konsistent ist. Sei  $\mathfrak{M} = (M, \epsilon^{\mathfrak{M}}) \models \text{ZFC} \cup \{\neg\text{CON}_{\text{ZFC}}\}$ . Sei  $a \in M$ , so dass  $\mathfrak{M} \models a = \omega$ . Ist  $(a, \epsilon^{\mathfrak{M}}) \cong (\omega, \in)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (4 Punkte) Schreiben Sie ein Registerprogramm für eine Kopiermaschine  $\mathcal{K}^{0,1}$ , die den Inhalt des Registers  $\mathcal{R}_1$  in das Register  $\mathcal{R}_0$  kopiert. Wieviele zusätzliche Register (sogenannte Hilfsregister) brauchen Sie?