Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Rekursionstheorie

Sommersemester 2019

Blatt 1, 29.04.2019 am 30.4.2019 um Definition erweitert

1. (8 Punkte) Definition: Die modifizierte Ackermannfunktion ist definiert durch
   $A_0(x) = x + 1$,
   $A_{y+1}(x) = (x + 1)$-malige Iteration von A_y auf den Anfangswert 1 .

   Wir schreiben statt $A_y(x)$ auch $A(x, y)$.

   Wir nennen eine Folge $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ von Tripeln $\langle x, y, z\rangle$ eine *Berechnung* der Ackermannfunktion, wenn gilt:

   - Wenn $(x, 0, z)$ in a vorkommt, ist $z = x + 1$.
   - Wenn $(0, y + 1, z)$ in a vorkommt, gehört $(1, y, z)$ zu a.
   - Wenn $(x + 1, y + 1, z)$ in a vorkommt, dann gibt es ein w, so dass $(x, y + 1, w)$ und (w, y, z) zu a gehören.

   Beweisen Sie:

   (a) Die Menge B aller Berechnungen der Ackermannfunktion ist primitiv rekursiv.
   (b) $A(x, y) = z$ gdw. $\langle x, y, z\rangle$ in einem $a \in B$ vorkommt.
   (c) A ist rekursiv.

2. (4 Punkte) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine nicht leere Menge von natürlichen Zahlen. Zeigen Sie: A ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn A das Bild einer totalen rekursiven Funktion ist.

3. (4 Punkte) Seien $P, Q \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbare Relationen. Zeigen Sie, dass $P \wedge Q$ und $P \vee Q$ auch r.a. sind. Wie steht es mit $\mathbb{N} \setminus P$?