

Rekursionstheorie

Sommersemester 2019

Blatt 2, 13.05.2019

Abgabe am 20.5.2019 vor der Vorlesung oder in den Kasten auf dem Logikflur, Ernst-Zermelo-Str. 1, 3. Stockwerk

Sei $n \in \mathbb{N}$, φ eine partielle Funktion von \mathbb{N}^n nach \mathbb{N} . Seien T_n das Kleene-Prädikat und U die im Normalformtheorem verwendete Projektionsfunktion. Eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ heißt *Index von φ* , wenn $\varphi \simeq \varphi_e$ und für $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$, $\varphi_e(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y))$.

1. (4 Punkte) Ist die Menge der Indizes der partiellen rekursiven Funktionen rekursiv oder sogar primitiv rekursiv? Sie können zum Beispiel ein Flussdiagramm skizzieren, um Ihre Antwort zu begründen.
2. (4 Punkte) Sei $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine partielle Funktion und sei $G_\varphi := \{(x, \varphi(x)) : x \in \mathbb{N} \wedge \varphi(x) \downarrow\}$. Die Menge G_φ heißt Graph von φ .
 - (a) Sei φ eine partielle rekursive Funktion. Ist G_φ rekursiv aufzählbar?
 - (b) Sei G_φ rekursiv aufzählbar. Ist φ partiell rekursiv?
3. (4 Punkte) Sei $\psi : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ eine partielle rekursive Funktion, und sei $\varphi(\vec{x}) \simeq \mu y (\psi(\vec{x}, y) \simeq 0)$. Ist φ partiell rekursiv?
4. (4 Punkte) Gibt es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass für jedes $e \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto f(e, x)$ primitiv rekursiv ist und es für jede primitiv rekursive Funktion $h(x)$ ein $e \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(\forall x \in \mathbb{N})(f(e, x) = h(x))$?

Könnte man sogar eine primitiv rekursive Funktion f mit den genannten Eigenschaften finden?

Hinweis: Betrachten Sie

$$f(e, x) := \begin{cases} U(\mu y T_1(e, x, y)), & \text{wenn } e \text{ der Index einer primitiv rekursiv Funktion ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$