**Abteilung für Mathematische Logik**
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

# Rekursionstheorie

Sommersemester 2019

Blatt 7, 24.06.2019

1. (4 Punkte) Zeigen Sie: $\beta$ ist genau dann partiell rekursiv in $\alpha$, wenn es ein partiell rekursives Funktional $F$ gibt, so dass $\beta(x) \simeq F(\alpha, x)$.

2. (4 Punkte) Gibt es Funktionen $f$ und $g$, so dass $f$ rekursiv in $g$ ist und es dennoch kein partiell rekursives Funktional $F$ gibt, so dass

   (i) $F$ immer definiert ist, wenn das Argument eine totale Funktion ist

   (ii) und $f(x) = F(g, x)$?

   Begründen Sie die Antwort.

   *Hinweis:* Versuchen Sie es mit einer Diagonalisierung.

3. (4 Punkte) Ist die Einsetzungseigenschaft für eingeschränkte Funktionale gültig? Begründen Sie die Antwort.

   *Hinweis:* Sei $G(f, x) \simeq 0$ und $F(x, z) \simeq 0 \Leftrightarrow x \in \overline{K_z}$. Hierbei ist $K$ das Halteproblem, und der Index $z$ an $K$ bedeutet Abschneiden bei stage $z$. Danach bildet man das Komplement. (Wir können ja nur r.e. Mengen an stages abschneiden, und $\overline{K}$ is nicht r.e.).

4. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass es r.e. Turinggrade $\mathbf{a}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_{n+1} \not\leq_T \mathbf{a}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{a}_n$ und $\mathbf{a}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{a}_n \not\leq_T \mathbf{a}_{n+1}$.

   Es gibt also unendliche viele für jede Turinggrade.

   *Erläuterung:* $\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2$ ist der kleinste Turinggrad über $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$. Es gibt so einen Grad: Wenn $A_1 \in \mathbf{a}_1$, $A_2 \in \mathbf{a}_2$, dann ist

   $$\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2 = A_1 \oplus A_2 / \equiv_T .$$

   Hierbei ist das Orakel $A_1 \oplus A_2 \subseteq \mathbb{N}$ dadurch hergestellt, dass $A_1$ (mit dem Faktor zwei gestreckt) auf die gerade Zahlen geschrieben wird und $A_2$ (um zwei gestreckt und eins verschoben) auf die ungeraden Zahlen geschrieben wird.