

Mathematische Logik
Sommersemester 2020
Übungsblatt 10, 14.7.2020

Abgabe spätestens am 21.7.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin
» Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB
» Mathematische Logik“ unter dem Punkt „Abgaben“.

1. (4 Punkte)

Finden Sie eine Formel φ und ein Modell \mathfrak{A} von Q^* so dass $Q \vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

2. (4 Punkte)

Sei $\varphi := \forall x, y(x < y \vee y < x \vee x = y)$. Gilt $Q \vdash \varphi$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (Bonus¹: 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass man nicht entscheiden kann, ob eine vorgelegte Registermaschine mit leerer Eingabe stoppt.

Hinweis: Sei A eine rekursiv aufzählbare, aber nicht rekursive Menge. Sei \mathcal{M} eine Maschine, die die partielle Funktion $A \times \{0\}$ berechnet. Betrachten Sie für jedes n die Maschine \mathcal{M}_n , die bei leerer Eingabe so läuft wie \mathcal{M} mit Eingabe n .

4. (Bonus: 4 Punkte)

Sei L endlich. Zeigen Sie: Jede L -Theorie widerspruchsfreie T mit rekursiven T^+ lässt sich zu einer widerspruchsfreien rekursiven vollständigen Theorie erweitern. In Ziegler's Buch heißt eine Theorie T mit entscheidbarem T^+ entscheidbar.

Hinweis: Beachten Sie hierzu Aufgabe 3 auf Blatt 9 und den Vervollständigungsschritt im Beweis des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes.

Für den Nachweis, dass die von Ihnen vorgeschlagene Vervollständigung rekursiv ist, brauchen Sie nur anschaulich zu argumentieren, dass es einen Algorithmus zur Berechnung gibt.

¹Diese Punkte zählen im Zähler aber nicht im Nenner des Quotienten, der mindestens $\frac{1}{2}$ sein soll.