

Mathematische Logik
Sommersemester 2020
Übungsblatt 3, 26.5.2020

Abgabe spätestens am 2.6.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg.de

1. (8 Punkte)

Alle Variablen in dieser Aufgabe stehen für aussagenlogische Variablen. Seien g_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form

$$\bigvee_{i=0}^{N-1} g_i$$

heißt Formel in *disjunktiver Normalform*.

Seien h_i Disjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form

$$\bigwedge_{i=0}^{N-1} h_i$$

heißt Formel in *konjunktiver Normalform*.

Ist jede aussagenlogische Formel φ zu einer Formel in disjunktiver Normalform $\bigvee_{i=0}^{N-1} g_i$ äquivalent?

Hinweis: Seien A_0, \dots, A_{n-1} die Aussagenvariablen in φ . Wir setzen für $j < n$, $A_j^W = A_j$ und $A_n^F = \neg A_j$. Wir schreiben μ auch für die Fortsetzung $\bar{\mu}$. Ist dann

$$\varphi \leftrightarrow \bigvee_{\{\mu: \{A_0, \dots, A_{n-1}\} \rightarrow \{W, F\} : \mu(\varphi) = W\}} \bigwedge_{j < n} A_j^{\mu(A_j)}$$

eine aussagenlogische Tautologie?

Ein Vorschlag zum Nachdenken (ohne Punkte, hierzu sollen Sie nichts abgeben): Man kann diese Herleitung auch für $\neg\varphi$ durchführen. Wie kommt man dann mithilfe der de Morgan'schen Regeln zur konjunktiven Normalform?

Noch eine Denkanregung (ohne Punkte): Man überlege sich, dass die Umformverfahren in der Regel exponentiell (in n) viele einzelne Umformschritte brauchen. Die Analyse aussagenlogischer Formeln kann zwar dem Computer überlassen werden, ist jedoch von der Komplexität her schwer handhabbar.

2. (8 Punkte)

Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots)$ die Aussagenlogik mit abzählbar unendlich vielen Satzvariablen. Zwei \mathcal{L} -Theorien T_1, T_2 heißen äquivalent gdw für alle \mathcal{L} -Formeln φ gilt:

$$T_1 \models \varphi \text{ gdw } T_2 \models \varphi.$$

- (a) Wieviele \mathcal{L} -Formeln gibt es?
- (b) Wieviele erfüllbare \mathcal{L} -Theorien gibt es? Eine \mathcal{L} -Theorie heißt erfüllbar, wenn es eine Wahrheitsbelegung von $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ gibt, so dass für alle $\varphi \in T$, $\mu(\varphi) = W$.
- (c) Wieviele paarweise nicht äquivalente \mathcal{L} -Theorien gibt es?