Abteilung für Mathematische Logik
Heike Mildenberger
Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2020
Übungsblatt 5, 9.6.2020

Abgabe spätestens am 16.6.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin ≫ Lehrveranstaltungen aus HISinOne ≫ Sommersemester 2020 ≫ Mathematisches Institut-VB ≫ Mathematische Logik” unter dem Punkt „Abgaben”.

1. (4 Punkte) Seien A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine fundierte Relation, d.h.

$$\forall B \subseteq A(B \neq \emptyset \to \exists b \in B \forall c \in B \neg c \, R \, b).$$

Solch ein b heißt R-minimales Element von B. Man definiert eine Funktion $\varrho : A \to \mathrm{On}$ wie folgt:

$$\varrho(a) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \neg\exists b(b \in A \wedge b \, R \, a); \\ \sup\{\varrho(b) + 1 : b \, R \, a\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\forall x, y \in A(x \, R \, y \to \varrho(x) < \varrho(y))$.

(b) $\varrho(x) = \inf\{\alpha : \forall y \in A(y \, R \, x \to \varrho(y) < \alpha)\}$.

2. (4 Punkte) Eine Menge S heißt T-*endlich*, wenn jede nicht leere Menge $X \subseteq \mathfrak{P}(S)$ ein $\subseteq$-maximales Element hat, d.h. $u \in X$ und für alle $v \in X$ gilt $u \subsetneq v$. Der Buchstabe T kommt von Tarski.

Eine Menge S heißt T-unendlich, wenn S nicht T-endlich ist.

Eine Menge M heißt endlich, wenn es eine Bijektion von M auf eine natürliche Zahl gibt. Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.

(a) Ist jedes $\underline{n} \in \omega$ T-endlich?

(b) Ist ω T-unendlich?

(c) Ist jede endliche Menge T-endlich?

(d) Ist jede unendliche Menge T-unendlich?

Wo verwenden Sie in Ihrer Argumentation das Auswahlaxiom?

Begründen Sie die Antworten.

3. (8 Punkte) Sei $\mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\beta : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Wir machen $\mathbb{N}$ zu einer $\{\in\}$-Struktur $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\beta$ durch $i \in^{\mathfrak{N}} j \Leftrightarrow i \in \beta(j)$.

(a) Welche Axiome von ZFC (ohne Fundierung) gelten in $\mathfrak{N}_\beta$?

(b) Finden Sie jeweils eine Bijektion β, so dass das Fundierungaxiom in $\mathfrak{N}_\beta$ gilt.
(*Hinweis*: Um eine fundierte Struktur zu erhalten, betrachte man die Bijektion β mit $\beta^{-1}(\{n_1, \ldots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$.)

(c) Geben Sie ein β an, für das $\mathfrak{N}_\beta$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.

(d) Geben Sie ein β an, für das $\mathfrak{N}_\beta$ nicht fundiert ist aber trotzdem das Fundierungsaxiom erfüllt.

(*Hinweis*: für Teil (d): Ersetzen Sie $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ und finden Sie eine geeignete Bijektion $\beta : \mathbb{Z} \to \mathfrak{P}_{<\omega}(\mathbb{Z})$, so dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \in \beta(n) \Rightarrow m < n$.)

Anregung zum Nachdenken über (d).
Sie sollten zu diesem Punkt nichts abgeben. In ZFC impliziert das Fundierungsaxiom die Fundierung definierbarer Klassen. Für den Beweis (der im Abschnitt über das Rekursionsgesetz geführt wurde) zogen wir die transitive Hülle heran. Wie sehen die tansitiven Hüllen in $\mathfrak{N}_\beta$ aus? Sind sie Elemente des Trägers?